УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Ауто-дуални симплицијални комплекси, њихова генерализација и примене у комбинаторици и геометрији

Докторска дисертација

Ментор
проф. др Раде Живаљевић

Студент
Тимотијевић Маринко 2012/2012

Београд
2019

Садржај

Предговор

Докторант Тимотијевић Маринко је уписао докторске студије Топологије школске 2012/2013 на Математичком факултету Универзитета у Београду. Током студија, положио је предмете Алгебарску топологију, Тополошку комбинаторику и Одабрана поглавља Алгебарске топологије код проф. др Синише Врећице, Теорију Морса, Диференцијалну топологију и ПЛ топологију код др Александра Грујића, К-теорију и Дискретну и рачунарску топологију код проф. др Радета Живаљевића.

Као део курса Дискретне и рачунарске топологије, докторант је програму Wolfram Mathematica конструисао велики број компјутерских програма. Ту се посебно истичу програми за одређивање комбинаторних инваријанти симплицијалних комплекса техникама линеарног програмирања који се наводе у Поглављу 4, као и програм за утврђивање ћелијске структуре симплицијалних комплекса помоћу Дискретне теорије Морса који омогућава рачунање хомологије симплицијалних комплекса. Помоћу конструисаних програма и великог броја експеримената докторант је успео да оформи и докаже велики број тврђења на којима је ова дисертација базирана. Такође, докторант је без прећашњег знања експериментално открио тзв. Комбинаторну Александерову дуалност (Теорема 2.2) што је у великој мери утицало на даљи ток његових истраживања.

Научно истраживачки рад докторанта започиње тзв. Ла-ла пројектом у сарадњи са др Мануелом Музиком Диздаревић и проф. др Радетом Живаљевићем. Циљ пројекта је била анализа поплочавања шаховских мрежа техникама Гребнерових база. Резултат је рад [25] објављен 2016-е године који представља генерализацију резултата Конвеја и Лагариаса објављеног у [7] из 1990-е године. Након тога, докторант своју пажњу преусмерава на истраживање ауто-дуалних симплицијалних комплекса (Дефиниција 3.2) као и њихових генерализација, тзв. $r-$неизбежних симплцијалних комплекса (Дефиниција 4.2). Резултат је рад [32] који омогућава нови увид у комбинаторну структуру ауто-дуалних комплекса што олакшава њихову конструкцију и комбинаторну класификацију. Докторант је заједно са проф. др Радетом Живаљевићем, проф. др Синишом Врећицом, др Душком Јоићем и Маријом Јелић коаутор рада [15] који се бави анализом комбинаторних својстава $r-$неизбежних симплицијалних комплекса. У време писања ове дисертације, докторант је учествовао у истраживању политопалности и звездоликости Биерових сфера (Дефиниција 2.2) заједно са др Филипом Јефтићем и проф. др Радетом Живаљевићем. Резултати истраживања су објављени у [14].

Главни предмет дисертације је анализа симплицијалних комплекса специјално, симплицијалних комплекса који су једнаки својем Александеровом дуалу (Дефиниција 2.1) које називамо ауто-дуални симплицијални комплекси. Ауто-дуални симплицијални комплекси се јављају у многим гранама математике попут алгебарске топологије, тополошке комбинаторике, теорије игара, теорије хипер-графова, комбинаторне оптимизације итд. Ради илустрације, позната „Теорема уског грла” Едмондса и Фулкерсена из [9] је класичан резултат теорије оптимизације по којем за сваки ауто-дуални симплицијални комплекс $K \subseteq 2^{[n]}$ и сваку функцију $f : [n] \to \mathbb{R}$ важи:

$$\max_{A \in \mathcal{C}} \min_{x \in A} f(x) = \min_{B \in \mathcal{C}} \max_{y \in B} f(y)$$

где је $\mathcal{C}$ фамилија комплемената свих главних (максималних) симплекса комплекса K.

У комбинаторној алгебарској топологији, ауто-дуални симплицијални комплекси представљају канонске примере геометријских објеката са ограниченом димензијом геометријског амбијента. У Поглављу 2, помоћу материјала преузетог из [22] и [23], се даје сажет доказ да ауто-дуални симплицијални комплекси $K \subseteq 2^{[n]}$ не могу да се представе хомеоморфним потпросторима Еуклидског простора $\mathbb{R}^{n-3}$. Доказује се да важи и генералније тврђење тј. спајањем (Дефиниција 1.6) ауто-дуалних симплицијалних комплекса $K_i \subseteq 2^{[n_i]}$, $i \in [k]$ добијамо канонске примере симплицијалних комплекса који нису уложиви у Еуклидски простор димензије $n_1+\cdots+n_k-k-2$ јер сваки њихов прави поткомплекс може да се уложи у $\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_k-k-2}$ (Теорема 2.4). У Поглављу 2 се такође наводи значај ауто-дуалних симплицијалних комплекса за процену димензије геометријског амбијента датог тополошког простора специјално, графова и симплцицијалних комплекса који нису планарни. Наводе се примери минималних триангулација пројективних простора (Примери 2.5 и 2.6) са нагласком на чињеницу да ауто-дуални симплицијални комплекси и њихова спајања често представљају минималне триангулације својих геометријских реализација.

Поглавље 3 је базирано на раду [32] и истражује интересантну везу између ауто-дуалних симплицијалних комплекса $K \subseteq 2^{[n]}$ и комплекса $K \subseteq 2^{[n-1]}$ који су поткомплекси својег Александеровог дуала, тзв. под-дуалних комплекса (Дефиниција 2.3). У овом поглављу се помоћу концепта „престројавања симплекса” (Тврђење 3.1) којег је оргинално увео Сергеј Меликхов у [23], описује техника реконструкције ауто-дуалних симплицијалних комплекса ради добијања свих ауто-дуалних комплекса у датом амбијенту. Ради једноставнијег прегледа и класификације, уводи се појам графа суседства $\mathcal{NG}_n$ којем су чворови сви ауто-дуални комплекси у амбијенту

$[n]$. Доказује се да је граф $\mathcal{NG}_n$ увек повезан а затим се анализирају путеви у графу $\mathcal{NG}_n$ који почињу ауто-дуалним комплексом $\Delta_{[n-1]} \subseteq 2^{[n]}$. Ова анализа омогућава конструкцију тзв. оператора корена $\surd : \mathcal{D}^{[n]} \to \mathcal{SD}^{[n-1]}$ (Дефиниција 3.1) где је $\mathcal{D}^{[n]}$ фамилија свих ауто-дуалних комплекса у амбијенту $[n]$ а $\mathcal{SD}^{[n-1]}$ фамилија свих под-дуалних комплекса у амбијенту $[n-1]$. Доказује се да оператор корена има инверзни поератор Λ којег називамо оператор дуалне надградње (Дефиниција 3.2) што доказује да је број ауто-дуалних комплекса у амбијенту $[n]$ једнак броју под-дуалних комплекса у амбијенту $[n-1]$ (Теорема 3.1). Затим се помоћу концепта линка симплекса (Дефиниција 1.5) и конуса симплицијалног комплекса даје геометријски опис оператора $\surd$ и Λ (Тврђења 3.7 и 3.8) што омогућава нови увид у структуру и комбинаторну класификацију ауто-дуалних симплицијалних комплекса. Главни резултат је Теорема 3.3 која доказује да је сваки ауто-дуалан симплицијални комплекс потпуно одређен линком произвољног темена. Поглавље се завршава карактеризацијом $f-$вектора, хомологије и кохомологије дуалних надградњи и описује се нова техника кострукције ауто-дуалних симплицијалних комплекса са унапред задатим хомолошким групама са посебним освртом на комплексе који „личе на пројективне равни" (Дефиниција 3.3).

Поглавље 4 је базирано на раду [15] и бави се анализом тзв. $r-$неизбежних симплицијалних комплекса (Дефиниција 4.2). Неизбежни симплицијални комплекси су први пут уведени у [4] под називом „Тверберг неизбежни поткомплекси" ради решавања проблема Твербerговог типа као главни аргумент Благојевић-Фрик-Циглер „методе ограничења". У овој дисертацији се анализирају особине $r-$неизбежних комплекса у контексту једне комбинаторне инваријанте симплицијалних комплекса $K \subseteq 2^{[n]}$ под називом партициона инваријанта (Дефиниција 4.1), у ознаци $\pi(K)$, која представља најмањи број $r \in \mathbb{N}$ такав да комплекс K садржи бар један симплекс сваке партиције амбијента $[n]$ на r дисјунктних скупова. Уводи се појам минимално r-неизбежних симплицијалних комплекса (Дефиниција 4.3) као генерализација ауто-дуалних комплекса (који су по новој терминологији минимално 2-неизбежни) и доказује се да је партициона инваријанта ових комплекса једнака r (Последица 4.2). Затим се анализира партициона инваријанта спајања симплицијалних комплекса (Теорема 4.1 и Последица 4.3) и доказује се главно тврђење да су симплицијални комплекси настали спајањем n ауто-дуалних комплекса минимално $(n+1)$-неизбежни (Тврђење 4.5) што имплицира да је њихова партициона инваријанта $n+1$.

У другом делу Поглавља 4 се анализира $r-$неизбежност симплицијалних комплекса који настају ограничавањем адитивне мере $\mu : 2^{[n]} \to \mathbb{R}_+$ односно комплекса облика $K_{\mu \leq \beta} = \mu^{-1}\big((-\infty, \beta]\big)$. Ове комплексе називамо линеарно релизабилним а константу β називамо праг комплекса $K_{\mu\leq\beta}$. Потом се доказује да праг β потпуно одређује ниво незбежности комплекса $K_{\mu\leq\beta}$ (Тврђење 4.6). Како симплицијалних комплекса који нису линеарно реализабилни има експоненцијално више од комплекса који јесу, у наставку се уводи појам карактеристичног прага $\rho(K)$ комплекса $K \subseteq 2^{[n]}$ (Дефиниција 4.5) као највећа вредност прага линеарно реализабилног поткомплекса комплекса K. Главни резултат је Теорема 4.2 која доказује да за партициону инваријанту π и карактеристични праг ρ важи неједнакост:

$$\pi(K) \leq \left\lfloor \frac{1}{\rho(K)} \right\rfloor + 1.$$

Даље се у Поглављу 4 описује техника рачунања карактеристичног прага методама линеарног програмирања (Проблем (4.9)), анализира се карактеристични праг комплекса са групом аутоморфизама G (Тврђење 4.12, Последица 4.4) и доказује се да ако је група аутоморфизама G комплекса K транзитивна, тада је карактеристични праг комплекса K потпуно одређен не-симплексом са најмање елемената (Последица 4.5). На крају се доказује да је карактеристични праг спајања симплцијалних комплекса потпуно одређен помоћу карактериситичних прагова компонената (Теорема 4.3) и уводи се појам ексцеса (Дефиниција 4.7) који мери грешку одређивања партиционе инваријанте комплекса помоћу карактеристике ρ.

Последње поглавље, Поглавље 5, описује примену Теореме 3.1 на одређивање Дедекиндових бројева $\mathbb{D}(n)$ уведених у [8] који представљају бројеве различитих Булових функција са $n \in \mathbb{N}$ променљивих. Доказује се неједнакост (5.3) која помоћу броја различитих ауто-дуалних комплекса у амбијенту $[n]$ обезбеђује доњу и горњу границу Дедекиндових бројева $\mathbb{D}(n)$.

Докторант се срдачно захваљује ментору, проф. др Радету Живаљевићу, на несебичној подршци, материјалима, идејама и саветима који су суштински допринели реализацији ове дисертације.

1 Увод

У овом поглављу дајемо кратак преглед основних концепата на којима је дисертација базирана. Дефиниције и тврђења су сагласна конструкцијама описаним у [22]. Читалац који је добро упознат са теоријом Комбинаторне геометрије или Тополошке комбинаторике може да пређе на Поглавље 2.

1.1 Геометријски симплцијални комплекси

Симплицијални комплекси представљају каноничну везу између геометрије и комбинаторике. Компактни тополошки потпростори Еуклидског простора $\mathbb{R}^n$ могу да буду представљени хомеоморфним објектима које називамо геометријски симплицијални комплекси односно њиховим полиедрима. Симплицијалне комплексе формира фамилија геометријских симплекса који у различитим димензијама представљају тачке, сегменте, троуглове, тетраедре итд.

Дефиниција 1.1. *Геометријски симплекс σ_A је конвексни омотач коначног, афино независног скупа A простора $\mathbb{R}^n$. Тачке скупа A називамо врхови симплекса σ_A. Димензија симплекса σ_A је $\dim \sigma_A = |A| - 1$. Конвексне омотаче подскупова скупа A називамо стране симплекса σ_A.*

Геометријски симплекси су конвексни и компактни тополошки простори. Њиховим спајањем добијамо сложеније објекте тзв. симплицијалне комплексе поштујући неколико једноставних правила.

Дефиниција 1.2. *Фамилија симплекса $\Delta = \{\sigma_{A_0}, \dots, \sigma_{A_k}\}$ је геометријски симплицијални комплекс ако задовољава следећа два услова:*

(1) За свако $\sigma_{A_i} \in \Delta$ и свако $B \subseteq A_i$ важи $\sigma_B \in \Delta$.
(2) За произвољне $\sigma_{A_i}, \sigma_{A_j} \in \Delta$ важи $\sigma_{A_i} \cap \sigma_{A_j} = \sigma_{A_i \cap A_j}$.

Тополошки простор $||\Delta|| = \bigcup_{i=0}^{k} \sigma_{A_i}$ називамо полиедар комплекса Δ.
Димензија комплекса Δ је $\dim \Delta = \max\{\dim \sigma_{A_i} \mid i = 0, \dots, k\}$.
Теменима комплекса Δ називамо скуп $V(\Delta) = \bigcup_{i=0}^{k} A_i$.

Приметимо да сваки симплицијални комплекс мора да садржи празан симплекс $\sigma_\emptyset = \emptyset$. Ако симплицијални комплекс садржи само празан симплекс, кажемо да је његова димензија -1. Симплицијални комплекс Δ чији је полиедар хомеоморфан трополошком простору X називамо триангулација простора X. Икосаедрална триангулација сфере S^2 је приказана на Фигури 1.

Многа тополошка својства полиедара, попут повезаности, Ојлерове карактеристике, хомологије, ко-хомологије су употпуности одређена комбинаторним својствима симплцијалних комплекса који их формирају. Како комбинаторне технике имају врло развијен математички апарат који углавном може да се испрограмира на већини програмских језика, триагулације простора омогућавају анализу тополошких простора помоћу рачунара што вишеструко олакшава формирање, тестирање а некада и доказ многих тврђења.

1.2 Апстрактни симплцијални комплекси

Многобројне геометријске конструкције над симплцијалним комплексима односно њиховим полиедрима могу да се замене комбинаторним конструкцијама над њиховим теменима. Отуда, ради једноставније комбинаторике, уместо тачака Еуклидских простора, као врхове симплицијалног комплекса можемо да користимо елементе коначних скупова без губљења комбинаторних инваријанти полазног простора. У ту сврху, уводимо концепт апстрактног симплицијалног комплекса.

Дефиниција 1.3. *Айсшракшни симйлицијални комйлекс над скуйом врхова* V *је йроизвољна фамилија скуйова* $K \subseteq 2^V$ *која задовољава услов: ако скуй* A *йрийада комйлексу* K*, шада и сваки йодскуй скуйа* A *йрийада комйлексу* K*. Скуйове* $A \in K$ *називамо (айсшракшни) симйлекси димензије* $\dim A = |A| - 1$*. Димензија комйлекса* K *једнака је максималној димензији његових симйлекса.*

Скуп врхова V ћемо да зовемо и комбинаторни амбијент или просто амбијент комплекса K. Напомињемо да симплекси симплицијалног комплекса не морају да садрже све врхове амбијента V.

На пример, сваки геометријски симплицијални комплекс Δ са фамилијом симплекса $\{\sigma_{A_0}, \ldots, \sigma_{A_k}\}$ одређује један апстрактни симплицијални комплекс $K = \{A_0, \ldots, A_k\}$ у амбијенту $V(\Delta)$.

Симплексе комплекса K који нису стране ни једног другог његовог симплекса називамо главни симплекси. Главни симплекси могу да се посматрају као максимални симплекси комплекса K у односу на релацију инклузије. Ако је $Gl(K)$ фамилија главних симплекса комплекса K, тада је:

$$K = \bigcup_{A \in Gl(K)} 2^A.$$

Дефиниција 1.4. *Нека су $K \subseteq 2^V$ и $L \subseteq 2^W$ симплицијални комплекси. Пресликавање $\pi : V \to W$ је симплицијално пресликавање комплекса K и L ако симплексе комплекса K пресликава у симплеске комплекса L.*

Симплицијално пресликавање $\pi : K \to L$ које је бијекција такво да је π^{-1} симплицијално се назива изоморфизам или комбинаторна еквиваленција. Ако овакво пресликавање постоји, кажемо да су комплекси K и L изоморфни или комбинаторно еквивалентни.

Еквивалнетно, бијекција $\pi : V \to W$ је изоморфизам комплекса $K \subseteq 2^V$ и $L \subseteq 2^W$ акко

$$(\forall A \subseteq V) A \in K \Leftrightarrow \pi(A) \in L.$$

У случају геметријских симплицијалних комплекса Δ_1 и Δ_2 односно одговарајућих апстрактних комплекса K_1 и K_2, симплицијално пресликавање $\pi : V(\Delta_1) \to V(\Delta_2)$ индукује непрекидно пресликавање f_π полиедра $||\Delta_1||$ у полиедар $||\Delta_2||$ које чува барицентричне координате тачака. Лако се показује да је f_π непрекидно а ако је π комбинаторна еквиваленција, тада је f_π хомеоморфизам.

Ако је апстрактни симплицијални комплекс K комбинаторно еквивалентан геометријском симплицијалном комплексу Δ, тада полиедар комплекса K, у ознаци $||K||$, дефинишемо као $||\Delta||$. На пример, произвољан скуп A кардиналности k одређује један апстрактни симплцијални комплекс $\Delta_A = 2^A$ у амбијенту A који представља триангулацију геометријског симплекса $\sigma_A = ||\Delta_A||$ чија је димензија $k-1$. Скуп A такође одређује комплекс $\partial\Delta_A = 2^A \setminus \{A\}$, минималну триангулацију сфере у амбијенту A димензије $k-2$.

Дакле, комбинаторна класификација симплицијалних комплекса обезбеђује тополошку класификацију њихових геометријских реализација. Међутим, постоје различите триангулације истог тополошког простора које нису комбинаторно еквивалентне. Отуда, да би комбинаторна класификација била тополошки веродостојна, потребно је конструисати јединствене триангулације датих тополошких простора са минималним бројем темена.

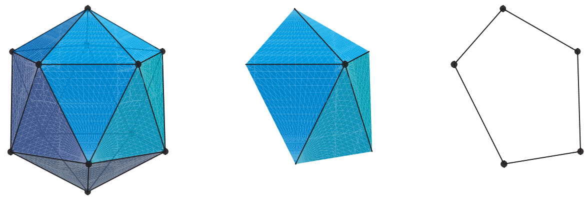
Сада наводимо неколико комбинаторних алатки за локалну анализу симплицијалних комплекса.

Дефиниција 1.5. *Нека је $K \subseteq 2^V$ симплицијални комплекс и $A \subseteq V$ произвољан симплекс.*

- ***Звезда** симплекса A, у ознаци $\mathrm{st}(A)$ представља скуп свих симплекса комплекса K којима је симплекс A страна.*

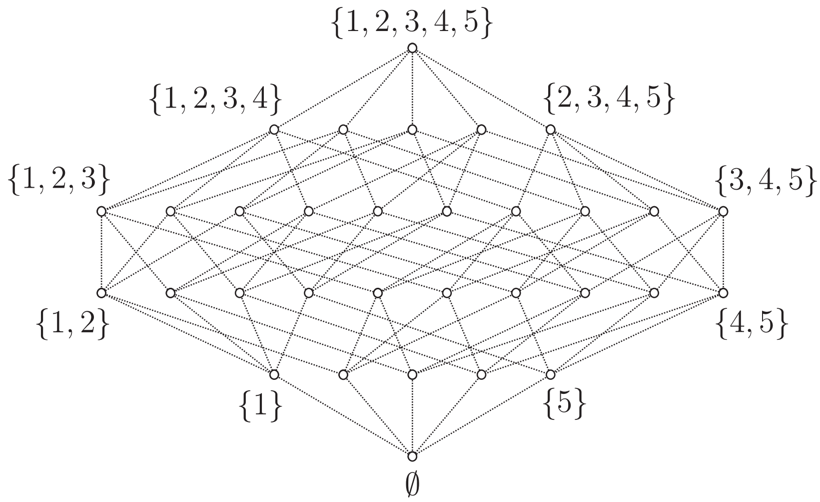
- ***Околина** симплекса A је скуп* $\mathrm{Nh}(A) = \{B \in K \mid B \subseteq F, F \in st(A)\}$.
- ***Линк** симплекса A, у ознаци* $\mathrm{Lk}(A)$ *је подскуп фамилије* $\mathrm{Nh}(A)$ *кога чине сви симплекси који не садрже симплекс A.*

Приметимо да $\mathrm{st}(A)$ није симплицијални комплекс када је $A \neq \emptyset$ и да околина симплекса A представља најмањи поткомплекс комплекса K који садржи $\mathrm{st}(A)$. Лако се показује да је $\mathrm{Lk}(A)$ поткомплекс комплекса K и да је $\mathrm{Nh}(A) \setminus \mathrm{st}(A) = \mathrm{Lk}(A)$. Пример звезде, околине и линка симплекса је дат на Фигури 1.



Фигура 1: Звезда и линк темена икосаедра.

Симплицијални комплекс K у односу на инклузију формира један парцијално уређен скуп. Отуда, сваком симплицијалном комплексу можемо да доделимо посет страница што нам омогућава још један алат за њихову анализу. Посет фамилије $2^{[5]}$ је приказан на Фигури 2.



Фигура 2: Посет фамилије $2^{[5]}$.

Дефиниција 1.6. *Нека су $K \subseteq 2^V$ и $L \subseteq 2^W$ симплицијални комплекси. Симплицијални комплекс $K * L = \{A \sqcup B \mid A \in K, B \in L\}$ називамо спајање (енг. join) комплекса K и L.*

Симплицијални комплекс $K * L$ има амбијент $V \sqcup W$ а његова димензија је $\dim K + \dim L - 1$. Ако су амбијенти V и W дисјунктни, уместо дисјунктне уније, у дефиницији спајања можемо да користимо класичну унију симплекса.

Пример 1.1. Симплицијални комплекс $\Delta_V = 2^V$ може да се представи као спајање $\Delta_A * \Delta_{A^c}$ за произвољан симплекс $A \subseteq V$. Довољно је да приметимо да је $\Delta_A * \Delta_{A^c} \subseteq \Delta_V$ и да произвољан симплекс $B \in \Delta_V$ може да се представи као унија $(B \cap A) \cup (B \cap A^c)$.

За комплексе K_1 и K_2, симплицијални комплекс $K_1 * K_2$ представља триангулацију геометријског спајања топололошких простора $||K_1||$ и $||K_2||$ (унија сегмената који спајају тачке простора $||K_1||$ са тачкама простора $||K_2||$). Ако је $||K_1|| \subset \mathbb{R}^{d_1}$ и $||K_2|| \subset \mathbb{R}^{d_2}$, полиедар спајања комплекса K_1 и K_2 се добија тако што се $||K_1||$ смести у d_1+1 димензионалну раван простора $\mathbb{R}^{d_1+d_2+2}$ а полиедар $||K_2||$ смештамо у њен ортогонални комплемент који је димензије $d_2 + 1$ тако да се полиедри $||K_1||$ и $||K_2||$ не секу. Тада, једна геометријска реализација спајања $K_1 * K_2$ је скуп:

$$||K_1|| * ||K_2|| = \{tx_1 + (1-t)x_2 \mid x_1 \in ||K_1||, x_2 \in ||K_2||, t \in [0,1]\}.$$

Итерацијом процеса спајања може да се дефинише спајање коначне фамилије симплицијалних комплекса $K_1, \ldots, K_n$ у амбијентима $V_1, \ldots, V_n$ редом. Резултат је симплицијални комплекс $K_1 * \cdots * K_n$ у амбијенту $V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_n$ са фамилијом симплекса $\{A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n \mid A_i \in K_i, i \in [n]\}$. Приметимо да је спајање симплицијалних комплекса у дисјунктним амбијентима комутативна и асоцијативна операција.

Пример 1.2. Нека је $K \subseteq 2^V$ произвољан симплицијални комплекс и нека је $\Delta_{\{v\}} = 2^{\{v\}}$ триангулација тачке, тада $K * \Delta_{\{v\}}$ представља триангулацију тополошког простора који називамо конус комплекса K у ознаци CK.

Произвољан симплицијални комплекс Δ_A у амбијенту $A = \{v_1, \ldots v_k\}$ може да се представи као спајање $\Delta_{\{v_1\}} * \cdots * \Delta_{\{v_k\}}$.

Ако је $|V| = n + 2$ и $\partial\Delta_V = 2^V \setminus \{V\}$ минимална триангулација $n-$димензионалне сфере у амбијенту V, спајање $\partial\Delta_V * \Delta_{\{v\}}$, као конус над сфером димензије n, представља триангулацију диска димензије $n+1$. Тада, спајање комплекса $\partial\Delta_V$ и Δ_A, где је $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$, може да се представи са

$$\partial\Delta_V * \Delta_{\{v_1\}} * \cdots * \Delta_{\{v_k\}}.$$

Због асоцијативности операције спајања, комплекс $\partial\Delta_V * \Delta_A$ можемо да видимо као узастопни конус над диском димензије n. Отуда, комплекс $\partial\Delta_V * \Delta_A$ представља триангулацију диска димензије $n+k$.

Пример 1.3. Генерализација октаедра, крст политоп $\diamondsuit^{n-1}$ представља триангулацију $n-1$ димензионалне сфере у амбијенту $V = \{\pm 1, \dots, \pm n\}$ са симплексима $\{A \subset V \mid -A \cap A = \emptyset\}$. Међутим, $\diamondsuit^{n-1}$ можемо да видимо и као спајање $\partial\Delta_{\{-1,1\}} * \dots * \partial\Delta_{\{-n,n\}}$. Како геометријска реализација спајања не зависи од триангулације комплекса, за произвољан симплицијални комплекс K и произвољну триангулацију сфере димензије $n-1$ у ознаци S^{n-1} важи:

$$||K * \mathrm{S}^{n-1}|| \approx ||K|| * ||\mathrm{S}^{n-1}|| \approx ||K|| * ||\diamondsuit^{n-1}||$$

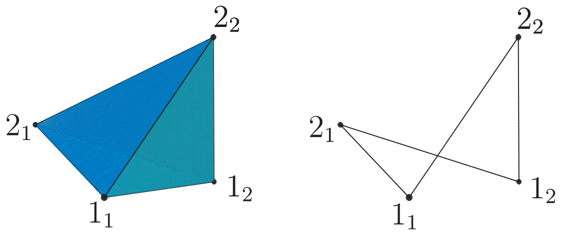
$$\approx ||K|| * ||\partial\Delta_{\{-1,1\}} * \dots * \partial\Delta_{\{-n,n\}}|| \approx ||K|| * ||\partial\Delta_{\{-1,1\}}|| * \dots * ||\partial\Delta_{\{-n,n\}}||$$

Познато је да геометријско спајање тополошког простора X и сфере S^0 представља суспензију простора X. Тако закључујемо да је симплицијални комплекс $K * \mathrm{S}^{n-1}$ триангулација $n-$тоструке суспензије простора $||K||$. Специјално, спајањем триангулација сфера S^{d_1} и S^{d_2} добијамо триангулацију сфере димензије $d_1 + d_2 + 1$.

Овде наводимо још једну варијанту спајања симплицијалних комплекса која представља редуковану варијанту стандардног спајања.

Дефиниција 1.7. *Нека су $K \subseteq 2^V$ и $L \subseteq 2^W$ симплицијални комплекси. Симплицијални комплекс $\{A \sqcup B \mid A \in K, B \in L, A \cap B = \emptyset\}$ називамо дисјунктно спајање (енг. deleted join) симплицијалних комплекса K и L у ознаци $K *_\Delta L$.*

Комплекс $K *_\Delta L$ је поткомплекс симплицијалног комплекса $K * L$ који садржи комплексе изоморфне комплексима K и L. При том, ако су амбијенти V и W дисјунктни, дисјунктно спајање симплицијлних комплекса се своди на стандардно спајање. Пример стандардног и дисјунктног спајања симплицијалних комплекса је дат на Фигури 3.



Фигура 3: Комплекси $K * K$ и $K *_\Delta K$ за $K = \Delta_{[2]}$.

Лема 1.1. *Нека су* $K_i, L_i \subseteq 2^{V_i}$, $i \in [n]$ *симплицијални комплекси такви да су амбијенти* $V_1, \ldots, V_n$ *дисјунктни. Тада,*

$$(K_1 * K_2 * \cdots * K_n) *_\Delta (L_1 * L_2 * \cdots * L_n)$$

$$= (K_1 *_\Delta L_1) * (K_2 *_\Delta L_2) * \cdots * (K_n *_\Delta L_n)$$

Доказ: Симплекси комплекса са леве стране једнакости су облика $F = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \sqcup (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)$ где $A_i \in K_i$ и $B_i \in L_i$ тако да је $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = \emptyset$. Због дисјунктности амбијената V_i, претходно је еквивалентно услову да је $A_i \cap B_i = \emptyset$ односно да $A_i \sqcup B_i \in K_i *_\Delta L_i$. Отуда, симплекс F може да се представи као унија $(A_1 \sqcup B_1) \cup (A_2 \sqcup B_2) \cup \cdots \cup (A_n \sqcup B_n)$ где је $A_i \sqcup B_i \in K_i *_\Delta L_i$ а ово су управо симплекси комплекса са десне стране једнакости. $\square$

2 Ауто-дуални симплицијални комплекси

У овом одељку дајемо карактеризацију и основне особине посебне класе симплицијалних комплекса. Дефиниције, тврђења и докази су преузети из канонског уџбеника тополошке комбинаторике [22].

2.1 Александерова дуалност

Произвољан апстракни симплицијални комплекс $K \subseteq 2^V$ дели партитивни скуп скупа V који означавамо са 2^V на дисјунктне потскупове K и $2^V \setminus K$. Како су скупови комплекса K инваријантни у односу на потскупове, скупови фамилије $2^V \setminus K$ су инваријантни у односу на натскупове тј. натскуп произвољног симплекса фамилије $2^V \setminus K$ такође мора да да буде садржан у $2^V \setminus K$. Отуда, комплементи симплекса фамилије $2^V \setminus K$ формирају посебан симплицијални комплекс.

Дефиниција 2.1. ***Александеров дуал*** *(или просто дуал) симплицијалног комплекса $K \subseteq 2^V$ је симплицијални комплекс $\widehat{K} \subseteq 2^V$ дат са:*

$$\widehat{K} = \{V \setminus A \mid A \notin K\}.$$

Како се у дисертацији користе Александерови дуали комплекса K у различитим амбијентима, Александеров дуал комплекса K у амбијенту V означаваћемо са $\widehat{K}^V$.

Лема 2.1. *Нека су $K, L \subseteq 2^V$ симплицијални комплекси.*

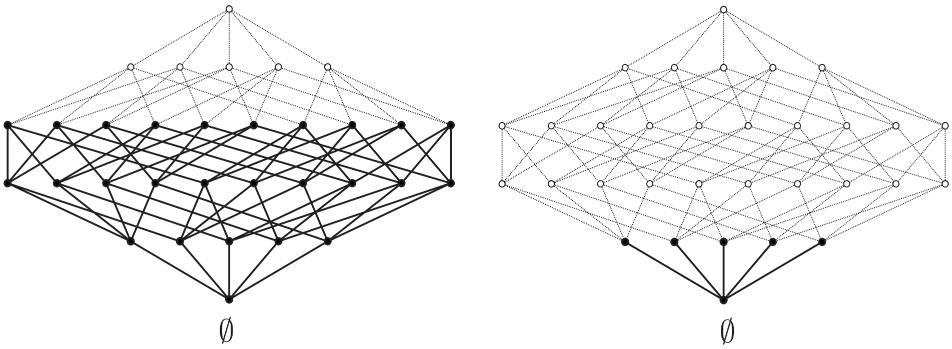
- *Ако је $K \subseteq L$ тада је $\widehat{L} \subseteq \widehat{K}$.*
- $\widehat{(\widehat{K})} = K$.

Доказ: Ако је $K \subseteq L$ тада је $2^V \setminus L \subseteq 2^V \setminus K$. Отуда, ако $A \in 2^V \setminus L$ односно $V \setminus A \in \widehat{L}$ то имплицира да $A \in 2^V \setminus K$ односно $V \setminus A \in \widehat{K}$.

За друго тврђење, довољно је да приметимо да симплекс A припада комплексу $\widehat{(\widehat{K})}$ акко $V \setminus A \notin \widehat{K}$ што је еквивалнетно услову да симплекс $V \setminus (V \setminus A) = A$ припада комплексу K. □

Пример 2.1. Нека је $\binom{[n]}{k}$ тзв. $(k-1)$-скелет комплекса $\Delta_{[n]} = 2^{[n]}$ односно највећи поткомплекс комплекса $\Delta_{[n]}$ димензије $k-1$. Тада, по Дефиницији 2.1, његов Александеров дуал у амбијенту $[n]$ је:

$$\widehat{\binom{[n]}{k}} = \{[n] \setminus A \mid |A| > k\} = \{A \mid |A| \leq n-k-1\} = \binom{[n]}{n-k-1}.$$



Фигура 4: Комплекс $\binom{[5]}{3}$ и његов Александеров дуал.

Дакле, дуал $(k-1)$-слекета комплекса $\Delta_{[n]}$ је његов $(n-k-2)-$скелет као што је илустровано на Фигури 4.

Специјално, ако посматрамо празан комплекс $\{\emptyset\} = \binom{[n]}{0}$, његов дуал у амбијенту $[n]$ је $\binom{[n]}{n-1} = 2^{[n]} \setminus \{[n]\} = \partial\Delta_{[n]}$ а овај комплекс представља триангулацију сфере димензије $n-2$.

Александеров дуал симплицијалних комплекса може да поједностави његову комбинаторну класификацију.

Лема 2.2. *Комӣлекси $K \subseteq 2^V$ и $L \subseteq 2^W$ су изоморфни акко су њихови Александерови дуали $\widehat{K}^V$ и $\widehat{L}^W$ изоморфни.*

Доказ: Нека је $\pi : V \to W$ изоморфизам комплекса K и L. Тада, симплекс $A \subset W$ не припада комплексу K акко симплекс $\pi(A)$ не припада комплексу L. Отуда, симплекс $V \setminus A$ припада $\widehat{K}^V$ акко $\pi(V \setminus A) = W \setminus \pi(A)$ припада комплексу $\widehat{L}^W$. □

По Дефиницији 2.1, ако симплицијални комплекс $K \subseteq 2^V$ има k симплекса, његов Александеров дуал има $2^{|V|} - k$ симплекса. Отуда, ако је $k < 2^{|V|} - k$ односно $k < 2^{|V|-1}$, комбинаторна класификација Александеровог дуала $\widehat{K}$ је једноставнија од комбинаторне класификације комплекса K.

Овде наводимо врло значајну комбинаторну конструцију коју додељујемо сваком симплицијалном комплексу помоћу његовог Александеровог дуала.

Дефиниција 2.2. *Нека је K симӣлицијални комӣлекс у амбијенӣу V. Тада, дисјункӣно сӣајање комӣлекса K и њеӣовоӣ Александеровоӣ дуала називамо **Биерова сфера** комлекса K у означи $Bier(K)$.*

Теорема 2.1. *Ако је $K \subseteq 2^V$ симплицијални комплекс и $|V| = n$, тада $Bier(K)$ представља триангулацију сфере димензије $n-2$.*

Доказ: Сваки симплицијални комплекс може да се добије од комплекса $\{\emptyset\}$ сукцесивним додавањем симплекса уређених растуће по димензији. Како је на основу Примера 2.1 комплекс $Bier(\{\emptyset\})$ заправо дисјунктно спајање $\{\emptyset\} *_\Delta \widehat{\{\emptyset\}} = \widehat{\{\emptyset\}} = 2^V \setminus \{V\} = \partial\Delta_V$, закључујемо да овај комплекс представља триангулацију сфере S^{n-2}. Отуда, да би доказали тврђење, довољно је да из претпоставке да је $Bier(K)$ триангулација сфере а $A \in 2^V \setminus K$ симплекс чије су стране садржане у K, докажемо да је и $Bier(K \cup \{A\})$ такође триангулација сфере.

Нека је $Bier(K)$ триангулација сфере S^{n-2} и A минимални не-симплекс. Како се комплекс K и $K \cup \{A\}$ разликују само за симплекс A, по Дефиницији 2.1, комплекс $\widehat{K}$ и $\widehat{K \cup \{A\}}$ се разликују само за симплекс A^c. Отуда, $\widehat{K \cup \{A\}} = \widehat{K} \setminus \{A^c\}$.

Сада, ако потражимо Биерову сферу новог комплекса добијамо:

$$Bier(K \cup \{A\}) = \big(K \cup \{A\}\big) *_\Delta \big(\widehat{K} \setminus \{A^c\}\big)$$

$$= \big(K *_\Delta \widehat{K}\big) \setminus \{B \sqcup A^c \mid B \in K, B \cap A^c = \emptyset\} \cup \{A \sqcup B \mid B \in \widehat{K}, A \cap B = \emptyset, B \neq A^c\}$$

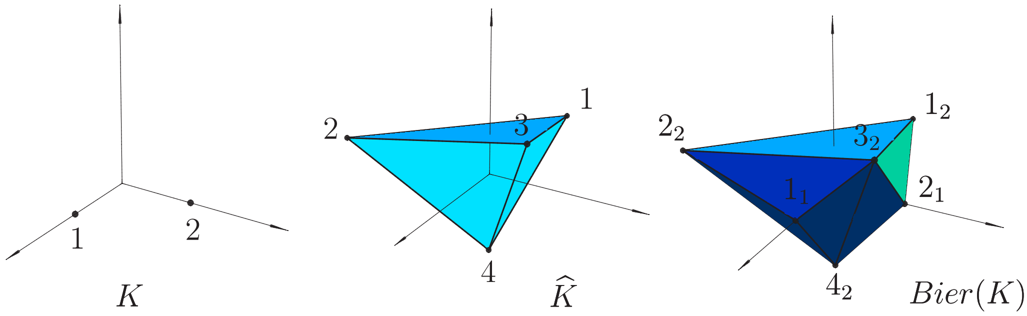
Дакле, комплекс $Bier(K \cup \{A\})$ је добијен од $Bier(K)$ избацивањем фамилије симплекса $L_1 = \{B \sqcup A^c \mid B \subset A\}$ а потом додавањем фамилије $L_2 = \{A \sqcup B \mid B \subset A^c\}$. Тада, минимални поткомплекс комплекса $Bier(K)$ који садржи L_1 је $K_1 = (2^A \setminus \{A\}) * 2^{A^c} = \partial\Delta_A * \Delta_{A^c}$. Такође, минимални поткомплекс Биерофе сфере $Bier(K \cup \{A\})$ који садржи фамилију симплекса L_2 је $K_2 = 2^A * (2^{A^c} \setminus \{A^c\}) = \Delta_A * \partial\Delta_{A^c}$.

По Примеру 1.2, комплекси K_1 и K_2 представљају триангулације диска димензије $|A| - 2 + |A^c| = |A| - 2 + n - |A| = n - 2$. Њихов пресек је комплекс $(2^A \setminus \{A\}) * (2^{A^c} \setminus \{A^c\}) = \partial\Delta_A * \partial\Delta_{A^c}$ који по Примеру 1.3 представља триангулацију сфере димезије $n-3$.

Дакле, комплекс $Bier(K \cup \{A\})$ је добијен од комплекса $Bier(K)$ склањањем унутрашњости диска K_1 и додавањем диска K_2 по истој граници. Како је по претпоставци $Bier(K)$ триангулација сфере димензије $n-2$, симплицијални комплекс $Bier(K \cup \{A\})$ је такође триангулација сфере димензије $n-2$.

Ово комплетира доказ. $\square$

У доказу Теореме 2.1, приметили смо да додавање симплекса комплексу K индукује ре-триангулацију једног диска на сфери $Bier(K)$. Операције помоћу којих се од једне триангулације простора добија друга ре-триангулацијом неког поткомплекса се називају *бистеларним операцијама*. Пример Биерове сфере симплицијалног комплекса је дат на Фигури 5.



Фигура 5: Биерова сфера комплекса $\binom{[2]}{1}$ у амбијенту [4].

2.2 Комбинаторна Александерова дуалност

У овом поглављу дајемо главну теорему која оправдава термин „Алексанедов дуал”. У тврђењима се користе концепти редуковане хомологије и ко-хомологије за целобројним кефицијентима. Ради комплетног увида у материју Алгебарске топологије, читаоцу се препоручују [13] или [24].

Класична Александерова дуалност представља везу редуковане кохомологије компактног, локално контрактибнилног тополошког простора X који је садржан у сфери S^n и редуковане хомологије његовог комплемента $S^n \setminus X$ (видети [13], Поглавље 3.3).

Као што смо видели у Теореми 2.1, симплицијални комплекс у амбијенту кардиналности n и његов Александеров дуал могу згодно да се сместе у Биерову сферу димензије $n-2$. Нека је T тополошки простор који представља комплемент геометријске реализације Биерове сфере $Bier(K)$ и потпросотора који одговара поткомплексу $K \subset Bier(K)$. Како је сваки симплицијални комплекс $K \subseteq 2^{[n]}$, односно његов полиедар, локално контрактибилан простор, класична Александерова дуалност обезбеђује релацију $\widetilde{H}_i(T) \approx \widetilde{H}^{n-3-i}(K)$. Као што ћемо ускоро да видимо, простор T у претходној релацији може да се замени симплицијалним комплексом $\widehat{K}$.

Нека је K симплицијални комплекс у амбијенту V где је $|V| = n$ који садржи свих n темена. Он може да се добије од комплекса $\Delta_\emptyset = \{\emptyset\}$ додавањем симплекса $A_1, \ldots, A_k$ уређених растуће по димензији. Тако добијамо низ симплицијалних комплекса:

$$\Delta_\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_{k-1} \subset K_k = K \tag{2.1}$$

таквих да је $K_i \setminus K_{i-1} = \{A_i\}$ за све $i \in [k]$. Ако сада применимо оператор дуалности на низ (2.1), користећи Лему 2.1 и Дефиницију 2.1 добијамо низ Александерових дуала:

$$\widehat{\Delta_\emptyset} = \widehat{K_0} \supset \widehat{K_1} \supset \cdots \supset \widehat{K_{k-1}} \supset \widehat{K_k} = \widehat{K} \tag{2.2}$$

са особином да је $\widehat{K_i} \setminus \widehat{K_{i-1}} = \{A_i^c\}$ за све $i \in [k]$. Дакле, комплекс $\widehat{K}$ може да се добије од комплекса $\widehat{\Delta_\emptyset} = 2^V \setminus \{V\}$ одузимањем редом симплекса $A_1^c, \ldots, A_k^c$.

Почетак низа (2.1) је симплицијални комплекс $\Delta_\emptyset$, док низ (2.2) почиње триангулацијом сфере $2^V \setminus \{V\} = \partial\Delta_V$ димензије $n-2$.

Приметимо да због дефинисаног уређења симплекса комплекса K, симплекси $A_1, \ldots, A_n$, представљају врхове а њихови комплементи $A_1^c, \ldots, A_n^c$ су симплекси димензије $n-2$. Тада, комплекс $K_1 = \{\emptyset, A_1\}$ је триангулација тачке а комплекс $\widehat{K_1} = \partial\Delta_V \setminus \{A_1^c\}$ представља триангулацију сфере димензије $n-2$ којој је одузета унутрашњост диска димензије $n-2$ односно $\widehat{K_1}$ је триангулација контрактибилног простора.

Аналогним поступком можемо да закључимо да за све $i \in [n]$, комплекс K_i представља триангулацију скупа од i тачака док $\widehat{K_i} = \partial\Delta_V \setminus \{A_1^c, \ldots, A_i^c\}$ представља триангулацију $n-2$-димензионалне сфере којој је одузето i дисјунктиних унутрашњости дискова димензије $n-2$ а овај тополошки простор је хомотопски еквивалентан клинастој суми (букету) $i-1$ сфера димензије $n-3$.

Отуда, редуковане хомолошке и кохомоло групе групе простора K_1 и $\widehat{K_1}$ су тривијалне док за $i = 2, \ldots, n$ имамо да је

$$\widetilde{H}_j(K_i) \approx \widetilde{H}^{n-3-j}(\widehat{K_i}) = \begin{cases} 0, & j > 0, \\ \bigoplus\limits_{l=1}^{i-1} \mathbb{Z}, & j = 0. \end{cases}$$

На овај начин закључујемо да су редуковане кохомолошке групе првих n чланова низа (2.2) изоморфне редукованим кохомолошким групама одговарајућих простора T. Доказује се да исто важи и за остале чланове низа (2.1) односно да важи тврђење:

Теорема 2.2. ***(Комбинаторна Александерова дуалност)*** *Нека је K симплицијални комплекс у амбијенту V где је $|V| = n$. Тада, за све $i = 0, \ldots, \dim K$ важи:*

$$\widetilde{H}_i(K) = \widetilde{H}^{n-3-i}(\widehat{K}).$$

Ова теорема се први пут појавила у [29]. Комплетан и транспарентан доказ овог тврђења може да се погледа у [3].

Дакле, можемо да закључимо да простори $\widehat{K}$ и T имају „исти хомолошки тип” односно да Александеров дуал комплекса K може у извесном смислу да се посматра као довољно добар комбинаторни модел његовог комплемента унутар Биерове сфере $Bier(K)$. Међутим, $\widehat{K}$ не мора да буде триангулација простора T.

2.3 Дуална класификација симплцијалних комплекса

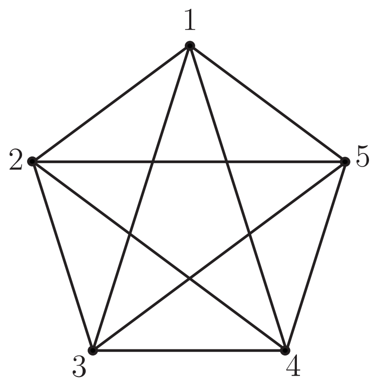
Симплицијални комплекс K у амбијенту V има Александеров дуал у истом амбијенту. Отуда, комплекси K и $\widehat{K}$ посматрани као фамилије скупова могу да се упореде у у односу на релацију „бити потскуп” што нам омогућава класификацију симплицијалних комплекса датог амбијета која ће да буде од великог значаја у остатку дисертације.

Дефиниција 2.3. *Нека је $K \subseteq 2^V$ симплицијални комплекс. Кажемо да је комплекс K:*

- ***под-дуалан*** *у амбијенту V ако је $K \subseteq \widehat{K}^V$;*
- ***над-дуалан*** *у амбијенту V ако је $\widehat{K}^V \subseteq K$;*
- ***ауто-дуалан*** *у амбијенту V ако је $K = \widehat{K}^V$;*
- ***трансцендентан*** *у амбијенту V ако K и $\widehat{K}^V$ нису упоредиви у односу на инклузију.*

Фамилију под-дуалних симплицијалних комплекса у амбијенту V ћемо да означимо са $\mathcal{SD}^V$ а фамилију свих ауто-дуалних комплекса у амбијенту V означавамо са $\mathcal{D}^V$. На основу Леме 2.1, видимо да је комплекс K над-дуалан у амбијенту V акко је његов Александеров дуал $\widehat{K}^V$ под-дуалан у амбијенту V.

Пример 2.2. Као што смо већ видели у Примеру 2.1, Александеров дуал комплекса $\binom{[n]}{k}$ у амбијенту $[n]$ је комплекс $\binom{[n]}{n-k-1}$. Отуда, (у амбијенту $[n]$) комплекс $\binom{[n]}{k}$ је под-дуалан акко је $2k+1 \leq n$, над-дуалан акко је $2k+1 \geq n$, и ауто-дуалан акко је $2k+1 = n$. Специјално, за $k = 2$ добијамо симплицијални комплекс $\binom{[5]}{2} = K_5$, комплетан граф са 5 темена приказан на Фигури 6.



Фигура 6: Комплетан граф K_5.

Ако је дати симплицијални комплекс под-дуалан у датом абијенту, на основу Леме 2.1, сви његови поткомплекси морају да буду под-дуални у истом амбијенту. Ова, опсервација, заједно са Примером 2.2, нам омогућава дуалну категоризацију датог комплекса помоћу његове димензије.

Тврђење 2.1. *Симплицијални комплекс K димензије k је под-дуалан у амбијенту V где је $|V| \geqslant 2k+3$.*

Доказ: По претпоставци, главни симплекси комплекса K су кардиналности $k+1$ што значи да је комплекс K поткомплекс комлекса $\binom{V}{k+1}$. Тада, ако на инклузију $K \subseteq \binom{V}{k+1}$ применимо оператор дуалности, добијамо $\widehat{\binom{V}{k+1}}^{V} \subseteq \widehat{K}^V$ а на основу Примера 2.1 то имплицира да је $\binom{V}{n-(k+1)-1} \subseteq \widehat{K}^V$. Како је по претпоставци $2k+3 \leq n$ добијамо да је $2k+3-k-2 \leq n-k-2$ тј. да је $k+1 \leq n-k-2$. Тако добијамо низ инклузија

$$K \subseteq \binom{V}{k+1} \subseteq \binom{V}{n-k-2} \subseteq \widehat{K}^V.$$

□

Сада наводимо врло практичну теорему за проверу под, над и ауто-дуалности симплицијалних комплекса.

Теорема 2.3. ***(Критеријум дуалности)*** *Нека је $K \subseteq 2^V$ симплицијални комплекс. Тада, у амбијенту V, комплекс K је:*

(1) *под-дуалан акко не постоји симплекс $A \subseteq V$ такав да симплекси A и $V \setminus A$ припадају комплексу K;*

(2) *над-дуалан акко не постоји симплекс $A \subseteq V$ такав да оба симплекса A и $V \setminus A$ не припадају K;*

(3) *ауто-дуалан акко за произвољан $A \subseteq V$, тачно један од симплекса A или $V \setminus A$ припадају комплексу K или еквивалентно*

$$(\forall A \subseteq V) A \in K \Leftrightarrow V \setminus A \notin K.$$

Доказ:
(1)($\Rightarrow$) Нека је $K \subseteq \widehat{K}$ и нека је $A \subseteq V$ такав да $A, V \setminus A \in K$. Тада, како је K поткомплекс комплекса $\widehat{K}$, добијамо да $V \setminus A, A \in \widehat{K}$ што по Дефиницији 2.1 значи да симплекси A и $V \setminus A$ не припадају комплексу K што није могуће.
($\Leftarrow$) Нека не постоји симплекс $A \subseteq V$ такав да A и $V \setminus A$ не припадају комплексу K. Тада, за произвољан $B \in K$, симплекс $V \setminus B$ не припада комплексу K што имплицира да $V \setminus (V \setminus B) = B$ припада дуалу $\widehat{K}$. Тако добијамо да је $K \subseteq \widehat{K}$.
(2) На основу Леме 2.1, комплекс K ће да буде над-дуалан акко је $\widehat{K}$ под-дуалан а по тврђењу **(1)** теореме, ово ће да буде случај акко не постоји симплекс $A \subseteq V$ такав да A и $V \setminus A$ припадају комплексу $\widehat{K}$ што је по Дефиницији 2.1 еквивалентно услову да оба симплекса не припадају комплексу K.
(3) По Дефиницији 2.3, симплицијални комплекс K је ауто-дуалан акко је над-дуалан и под-дуалан. Отуда, за произвољан $A \subseteq V$, ако $A \in K$ да би важило тврђење **(1)**, симплекс $V \setminus A$ не сме да припада комплексу K. Такође, ако $A \notin K$, тада због тврђења **(2)** закључујемо да симплекс $V \setminus A$ мора да припада комплексу K. $\square$

Следећи пример илуструје како промена комбинаторног амбијента утиче на дуалну класификацију симплицијалних комплекса.

Пример 2.3. Симплицијални комплекс $\Delta_{[n]} = 2^{[n]}$ је над-дуалан у амбијенту $[n]$, ауто-дуалан у амбијенту $[n+1]$ и под-дуалан у амбијенту $[n+2]$.

Заиста, применом Теореме 2.3, за произвољан $A \subseteq [n]$, оба симплекса A и $[n] \setminus A$ припадају фамилији $2^{[n]}$ што потврђује тврђење **(2)**. Такође, за произвољан $A \subseteq [n+1]$, скуп A не садржи теме $\{n+1\}$ акко $[n+1] \setminus A$ садржи $\{n+1\}$ или еквивалентно, $A \in \Delta_{[n]}$ акко $[n+1] \setminus A \notin \Delta_{[n]}$ што потвђује тврђење **(3)**. На крају, $\Delta_{[n]}$ је поткомплекс комплекса $\Delta_{[n+1]}$ па на основу Леме 2.1 добијамо да је симплицијални комплекс $\widehat{\Delta_{[n+1]}}^{[n+2]}$, који је по претходном закључку једнак $\Delta_{[n+1]}$, садржан у комплексу $\widehat{\Delta_{[n]}}^{[n+2]}$. Тако закључујемо да је $\Delta_{[n]} \subset \widehat{\Delta_{[n]}}^{[n+2]}$.

Овај пример илуструје особину да увећањем комбинаторног амбијента комплекса $\Delta_{[n-1]}$ увећавамо и његов Александеров дуал што је такође истинито и за било који други симплицијални комлекс.

Тврђење 2.2. *Сваки симплицијални комплекс* $K \subseteq 2^V$ *је под-дуалан у амбијенту* W *где је* $V \subset W$.

Доказ: Како је $K \subseteq \Delta_V \subset \Delta_W$, постоји $v \in W$ тако да $K \subseteq \Delta_{W\setminus\{v\}}$. Ако на претходну инклузију применимо оператор дуалности, применом Леме 2.1 добијамо да је $\widehat{\Delta_{W\setminus\{v\}}}^W \subseteq \widehat{K}^W$ а на основу Примера 2.3 знамо да је $\widehat{\Delta_{W\setminus\{v\}}}^W = \Delta_{W\setminus\{v\}}$. Тако добијамо да је $K \subseteq \Delta_{W\setminus\{v\}} \subseteq \widehat{K}^W$. $\square$

Пример 2.4. Једини ауто-дуални симплицијални комплекси у амбијенту V, који не садрже све врхове $\{v\} \subset V$, су $\Delta_{V\setminus\{v\}}$.

Заиста, на основу Примера 2.3 знамо да су комплекси $2^{V\setminus\{v\}}$ ауто-дуални у амбијенту V за све $v \in V$. Нека је $K \subseteq 2^V$ Ауто-дуалан симплицијални комплекс који не садржи врх $\{v\}$. Тада, по Теореми 2.3 тврђење **(3)**, симплекс $V \setminus \{v\}$ мора да припада комплексу K. Како стране симплекса припадају симплицијалном комплексу, добијамо да је $K = 2^{V\setminus\{v\}}$.

Тако закључујемо да у амбијенту V постоји тачно $|V|$ ауто-дуалних симплицијалних комплекса који не садрже све врхове скупа V. Ови комплекси ће да одиграју значајну улогу у остатку дисертације.

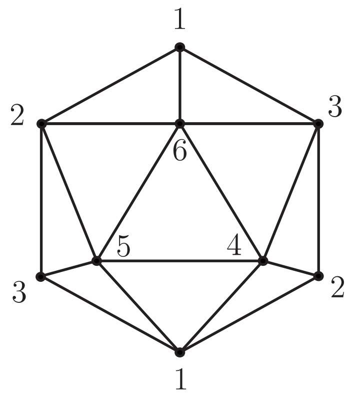
2.4 Ауто-дуалне триангулације пројективних простора

У овом одељку наводимо неколико значајних примера ауто-дуалних триангулација добро познатих тополошких простора. Ауто-дуалност добијених комплекса је врло значајна компонента. Материјал је преузет из рада [21] који садржи обимну каталогизацију тополошких простора са познатим минималним триангулацијама.

Пример 2.5. Реална пројективна раван $\mathbb{RP}^2$ може да се посматра као фактор простор добијен идентификацијом антиподалних тачака сфере S^2. Отуда, да би добили триангулацију простра $\mathbb{RP}^2$, довољно је да искористимо икосаедар, који представља антиподалну триангулацију сфере и спојимо антиподално симетричне симплексе. Тако добијамо комплекс RP_6 који називамо *хеми-икосаедар*, триангулацију простора $\mathbb{RP}^2$ са 6 темена приказану на Фигури 7.

Јургеман и Рингел су у [17] и [27] доказали да дводимензионалне многострукости M (које нису хомеоморфне оријантебилним површима рода 2, Клајнеовој боци или не-оријентабилној површи рода 3) имају триангулације са n темена акко је:

$$\binom{n-3}{2} \geqslant 3\big(2 - \chi(M)\big)$$



Фигура 7: Триангулација RP_6 реалне пројективне равни.

где је χ Ојлерова карактеристика многострукости.

Како је Ојлерова карактеристика пројективне равни 1, закључујемо да је хеми-икосаедар минимална триангулација простора $\mathbb{RP}^2$.

Хеми-икосаедар је и ауто-дуалан симплицијални комплекс. Довољно је да приметимо да су комплементи главних симплекса хеми-икосаедра минимални не-симплекси фамилије $2^{[6]} \setminus RP_6$ и да је $\binom{[6]}{2} \subset RP_6$.

Брем и Кунел су у [6] доказали да за триангулације $d-$димензионалних многострукости које нису сфере са n темена важи неједнакост

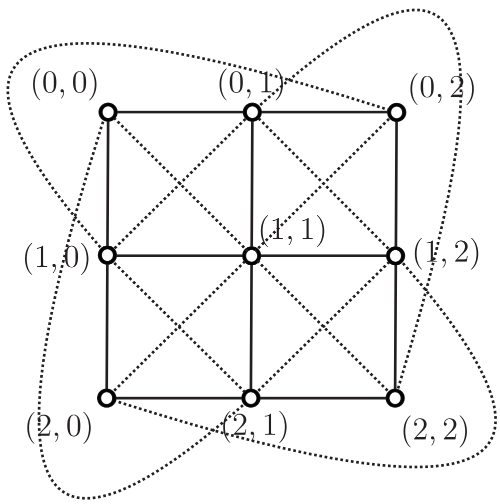
$$n \geq 3\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 3$$

при том, једнакост важи само у случајевима $d = 2, 4, 8, 16$ када је M многострукост која „личи на пројективну раван” односно тава да постоји Морсова функција $f : M \to \mathbb{R}$ са тачно три критичне вредности (овакве многоструксоти су детаљно анализиране у [10]). За $d = 2$, добијамо управо хеми-икосаедар описан у Примеру 2.5. Сада наводимо пример триангулација ових простора за $d = 4$.

Пример 2.6. Као што је доказано у [2] односно [1], Комплексна пројективна раван $\mathbb{CP}^2$ има јединствену минималну триангулацију CP_9 са 9 темена. Башкар Багчи и Басудеб Дата су у [2] описали главне симплексе овог комплекса на следећи начин.

Нека је $Gl(CP_9)$ скуп свих главних симплекса триангулације CP_9 и нека је $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ афина раван реда 3 приказана на Фигури 8.

Неке особине афине равни $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ су:



Фигура 8: Амбијент комплекса CP_9.

- раван садржи 9 тачака,
- постоји 12 различитих правих,
- свака права садржи три тачке,
- две различите тачке припадају јединственој правој,
- кроз сваку тачку пролазе 4 праве,
- три паралелне праве формирају партицију скупа $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ на дисјунктне потскупове.

Амбијент V комплекса CP_9 је афина раван $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Нека је L скуп свих правих афине равни $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Нека је $P \subset L$ скуп од 3 паралелне праве $l_0, l_1, l_2 \in L$ где је $l_i = \{(i,0),(i,1),(i,2)\}$ (ове праве ћемо називати врстама). Приметимо да кроз сваку тачку $v \in V$ пролази тачно једна права скупа P.

Нека је $G_1 \subseteq 2^V$ фамилија дата са: за свако $i = 0, 1, 2$ и свако $v \in l_i$ скуп $(l_i \cup l_{1+_3 i}) \setminus \{v\}$ припада фамилији G_1 ($+_3$ је сабирање по модулу 3). Тада $|G_1| = 3 \cdot 3 = 9$.

Нека је $G_2 \subseteq 2^V$ фамилија дата са: за различите праве $m_1, m_2 \in L \setminus P$, ако је $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ тада $m_1 \cup m_2$ припада фамилији G_2. Овако смо добили нових $|G_2| = 9 \cdot \binom{3}{2} = 27$ симплекса.

Нека је $Gl(CP_9) = G_1 \cup G_2$. Како су скупови G_1 и G_2 дисјунктни, добијамо да је $|Gl(CP_9)| = |G_1| + |G_2| = 36$ тј. овај комплекс има 36 главних симплекса.

Докажимо да је CP_9 аутодуалан у амбијенту V. Нека је $A \subseteq 2^V$ произвољан симплекс.

Ако је $|A| \leq 3$, и A припада унији две паралелне праве $l_i, l_{1+_3 i} \in P$ то ће да буде случај ако је $A = l_{1+_3 i}$, или симплекс A припада скупу $(l_i \cup l_{1+_3 i}) \setminus \{v\}$ за неко $v \in l_i$ односно A је садржан у неком симплексу фамилије G_1. Ако A није садржан ни у једном симплексу фамилије G_1, он сече све три врсте скупа V тј. он је облика $A = \{(0,i),(1,j),(2,k)\}$. Тада праве m_1 и m_2 одређење паровима $(0,i),(1,j)$ и $(1,j),(2,k)$ не припадају фамилији P и секу се у темену $(1,j)$ што имплицира да је $A \subset m_1 \cup m_2 \in G_2$.

Овако смо доказали да је $\binom{V}{3} \subset CP_9$. Како је $\dim CP_9 = 4$, симплекси фамилије $\binom{V}{>5}$ не припадају комплексу CP_9. Отуда, да би доказали да тврђење **(3)** Теореме 2.3 важи за комплекс CP_9, треба да проверимо да од два дисјунктна симплекса $A, B \subseteq V$ где је $|A| = 5$ и $|B| = 4$, тачно један од њих припада комплексу CP_9.

Нека је $|A| = 4$ (аналогним поступком се доказује случај $|A| = 5$).

Тада, симплекс $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ не припада комплексу CP_9, у следећа три случаја:

- права $m_1 = v_1v_2$ је дијагонала, паралелна правој $m_2 = v_3v_4$, тако да v_1, v_2, v_3, v_4 не припадају двема паралелним врстама,
- права $m_1 = v_1v_2$ је колона паралелна правој $m_2 = v_3v_4$, тако да v_1, v_2, v_3, v_4 не припадају двема паралелним врстама.
- темена v_1, v_2, v_3 припадају истој врсти l_i а v_4 припада врсти $l_{1+_3 i}$.

У првом случају, A^c садржи дијагоналу m_0, паралелну правој m_1 а $A^c \setminus m_0 = \{w_1, w_2\}$ где $w_1 \in m_1$ и $w_2 \in m_2$ (својство партиције скупа V паралелним правим). Тада права w_1w_2 не припада P (јер би у том случају v_3v_1 и v_2v_4 биле паралелне врсте) и није паралелна m_0 (јер припада различитим правим које су јој паралелне) па, $w_1w_2 \cup m_0 = A^c$ је главни симплекс фамилије G_2.

У другом случају, A^c садржи колону m_0, паралелну правој m_1 а $A^c \setminus m_0 = \{w_1, w_2\}$ где темена $w_1 \in m_1$ и $w_2 \in m_2$ не припадају истој врсти јер би у супротном v_1, v_2, v_3, v_4 припадали паралелним врстама. Отуда, w_1w_2 је дијагонала па мора да сече колону m_0, што значи да $w_1w_2 \cup m_0 \in G_2$.

У трећем случају, A^c је заправо скуп $(l_{1+_3 i} \cup l_{2+_3 i}) \setminus \{v_4\}$ који припада фамилији G_1.

Дакле, у сва три случаја A^c припада комплексу CP_9.

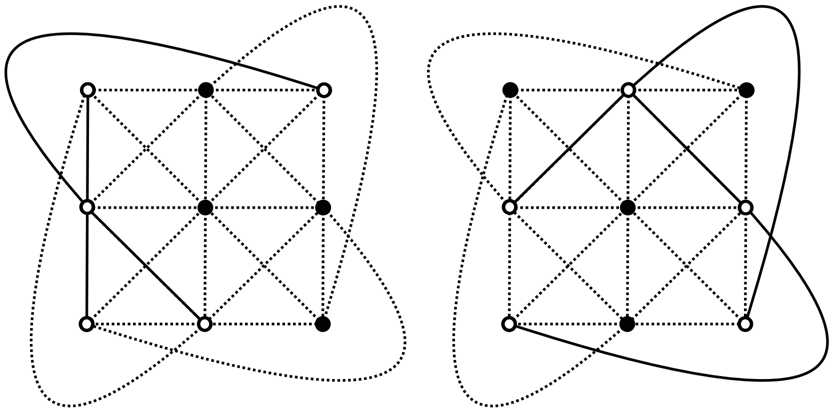
Нека сада A припада комплексу CP_9. То ће да буде случај ако:

- A је страна симплекса фамилије G_1 односно, највише два темена симплекса A припадају врсти l_i а остала темена припадају врсти $l_{1+_3 i}$.

- A је страна симплекса фамилије G_2 тј. припада пресеку правих фамилије $L \setminus P$.

У првом случају A^c садржи врсту $l_{2+_3 i}$ и највише један елемент врсте $l_{1+_3 i}$ па не може да буде симплекс фамилије G_1 а ово су једини симплекси са 5 елемената који припадају комплексу CP_9 и садрже целу врсту.

У другом случају, ако је A пресек правих фамилије $L \setminus P$, темена његовог комплемента се налазе у свим врстама. Отуда, да би A^c био симплекс, он мора да буде потсимплекс главног симплекса фамилије G_2. Међутим, A^c је такав да његова темена припадају двема паралелним колонама или двема паралелним дијагоналама (ако је A пресек колоне и дијагонале), или темена симплекса A^c формирају четири тачке такве да су сваке 3 од њих не-колинеарне као што је илустровано на Фигури 9. Отуда, A^c није могуће сместити на пресек правих фамилије G_2 што доказује да $A^c \notin CP_9$.



Фигура 9: Комплементи главних симплекса фамилије G_2.

Дакле, и CP_9 је аутодуалан симплицијални комплекс.

Претходни примери указују на особину да се ауто-дуални симплицијални комплекси често јављају као минималне триангулације тополошких простора те заслужују да им се посвети пажња.

Случај триангулација осмо-димензионалних многострукости које „личе на пројективне равни" је интензивно истраживан у [5]. Откривено је да постоји најмање шест комбинаторно различитих тиангулација многострукости које имају исте хомолошке групе као кватернионска пројективна раван

$\mathbb{HP}^2$. Тек је 2016-е године у [11] откривено да бар једна од ових триангулација заиста представља кватернионску раван. Проблем комбинаторне конструкције ових многострукости димензије 16 у тренутку писања ове дисертације није решен.

У Поглављу 4.6 ће да буде наведен нови приступ конструкцији триангулација ових простора.

2.5 Геометријски амбијент симплицијалних комплекса

Ако постоји потпростор Еуклидског простора $\mathbb{R}^d$ хомеоморфан тополошком простору X (или полиедру комплекса K), тада $\mathbb{R}^d$ називамо геометријски амбијент простора X (или комплекса K).

Ауто-дуални симплицијални комплекси у комбинаторним амбијентима кардиналности n имају врло значајну геометријску особину. Наиме, њихове геометријске реализације није могуће представити хомеоморфним потпросторима Еуклидских простора димензије $n-3$ односно њихов геометријски амбијент је ограничене димензије. Овде представљамо математичко оправдање ове чињенице материјалом преузетим из [22]. Ради комплетног увида у теорију еквиваријантне теорије индекса чијом применом су тврђења доказана, читаоцу се препоручују [34] или [33].

Добро позната Бурсук-Уламова теорема описана у [22], односно њена последица, тврди да не постоји непрекидно пресликавање $f : S^n \to S^d$ где је $d < n$ са особином да је $f(-x) = -f(x)$. Оваква пресликавања називамо $\mathbb{Z}_2$ еквиваријантним. Мотивисан последицама ове теореме, уведен је појам $\mathbb{Z}_2$ индекса произвољног слободног $\mathbb{Z}_2$ еквиваријантног тополошког простора или симплицијалног комплекса K као минимална димензија сфере S^d у коју полиедар $||K||$ може да се преслика $\mathbb{Z}_2$ еквиваријантним пресликавањем односно:

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(K) = \min\{n \in 0, 1, \dots \mid \exists f : ||K|| \to S^n, f\big(\nu(x)\big) = -f(x)\}.$$

Неколико особина овако дефинисаног индекса су

- $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^n) = n$ за све $n = 0, 1, 2 \dots$,
- ако је $f : ||K|| \to ||L||$ пресликавање које је $\mathbb{Z}_2$ еквиваријантно, тада $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2} K \leq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2} L$,
- $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(K * L) \leq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(K) + \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(L) + 1$.

Прва је очигледна последица Бурсук-Уламове теореме. За другу особину, приметимо само да ако $||K||$ може да се $\mathbb{Z}_2$ еквиваријантно пресликa у $||L||$ а $||L||$ може да се $\mathbb{Z}_2$ еквиваријантно преслика у S^d, тада и $||K||$ може да се $\mathbb{Z}_2$ еквиваријантно преслика у S^d простом композицијом пресликавања. Трећа особина је последица чињенице да ако имамо $\mathbb{Z}_2$ еквиваријантна пресликавања $f : ||K|| \to S^{d_1}$ и $g : ||L|| \to S^{d_2}$, тада спајање пресликавања f и g дато са $f * g(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)g(y)$ је непрекидно, $\mathbb{Z}_2$ еквиваријантно, и пресликава $||K|| * ||L|| \approx ||K * L||$ у простор $S^{d_1} * S^{d_2} \approx S^{d_1+d_2+1}$.

Дисјунктно спајање произвољног симплицијалног комплекса K са самим собом је пример једног слободног, $\mathbb{Z}_2$ еквиваријантног, симплицијалног комплекса. Ако је V амбијент комплекса K, као амбијент дијсунктног спајања $K *_\Delta K$ може да послужи скуп $\overline{V} = V \times \{-1, 1\}$. Тада:

$$K *_\Delta K = \{A \times \{1\} \cup B \times \{-1\} \mid A, B \in K, A \cap B \neq \emptyset\}.$$

Деловање групе $\mathbb{Z}_2$ на овај комплекс се дефинише симплицијалним пресликавањем $\nu : \overline{V} \to \overline{V}$ датим са $\nu(v, i) = (v, -i)$. Очигледно $\nu \circ \nu = \mathbb{1}_{\overline{V}}$. Како за произвољан $F \in K *_\Delta K$ важи $F \cap \nu(F) = \emptyset$, овако дефинисано $\mathbb{Z}_2$ деловање је слободно. Наравно, на полиедру $||K *_\Delta K||$ деловање групе $\mathbb{Z}_2$ се дефинише помоћу индукованог пресликавања f_ν.

У Поглављу 5.5 уџбеника [22] је доказано да произвољно непрекидно пресликавање $f : ||K|| \to \mathbb{R}^d$ индукује једно $\mathbb{Z}_2$ еквиваријантно пресликавање $f *_\Delta f : ||K *_\Delta K|| \to S^d$ што имплицира да је $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(K *_\Delta K) \leq d$. При том, $f *_\Delta f$ је рестрикција спајања пресликавања $f * f$ са скупа $||K * K||$ на потскуп $||K *_\Delta K||$. Тако добијамо да ако је

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(K *_\Delta K) \geq d,$$

симплицијални комплекс K нема геометријску реализацију у Еуклидском простору димензије мање од d.

Сада, ако посматрамо произвољан ауто-дуалан симплицијални комплекс K у амбијенту V кардиналности n, дисјунктно спајање $K *_\Delta K$ је на основу Теореме 2.1 заправо триангулација сфере димензије $n-2$. Тако закључујемо да је $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(K *_\Delta K) = n - 2$ и да $||K||$ нема геометријску реализацију у Еуклидском простору димензије мање од $n-2$.

Слично ограничење димензије геометријске реализације може да се добије и за спајање аутодуалних комплекса. Сергеј Мелхиков је у [23] дао једноставан доказ да се спајањем аутодуалних комплекса добијају „оптимални" примери комплекса са ограниченом димензијом геометријског амбијента.

Теорема 2.4. *Ако је* $\{K_i \subset 2^{V_i} \mid |V_i| = n_i, i \in [k]\}$ *фамилија аутодуалних симплицијалних комплекса у дисјунктним амбијентима* $V_1, \dots, V_k$, *тада симплицијални комплекс* $K = K_1 * \cdots * K_k$ *нема геометријску реализацију у Еуклидском простору димензије мање од* $n_1 + \cdots + n_k - k - 1$ *док сваки прави поткомплекс комплекса* K *може да се реализује у простору димензије* $n_1 + \cdots + n_k - k - 2$.

Доказ: На основу Леме 1.1 и Теореме 2.1, дисјунктно спајање $K *_\Delta K$ је симплицијални комплекс:

$$(K_1 * \cdots * K_k) *_\Delta (K_1 * \cdots * K_k) = (K_1 *_\Delta K_1) * \cdots * (K_k *_\Delta K_k)$$

$$= Bier(K_1) * \cdots * Bier(K_k) = \mathrm{S}^{n_1-2} * \cdots * \mathrm{S}^{n_k-2} = \mathrm{S}^{n_1+\cdots+n_k-2k+k-1}.$$

Дакле, дисјунктно спајање комплекса $K_1 * \cdots * K_k$ са самим собом представља триангулацију сфере димензије $n_1 + \cdots + n_k - k - 1$ па је

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}\big(K *_\Delta K\big) = n_1 + \cdots + n_k - k - 1$$

што имплицира да комплекс $K_1 * \cdots * K_k$ нема геометријску реализацију у Еуклидском простору димензије мање од $n_1 + \cdots + n_k - k - 1$.

Нека је сада L прави поткомплекс комплекса K. Тада постоји главни симплекс $F \in K_1 * \cdots * K_k$ који не припада комплексу L и он је облика $F = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ где су $A_i \in K_i$ непразни главни симплекси комплекса K_i. Како је сваки од комплекса K_i аутодуалан, добијамо да $V_i \setminus A_i \notin K_i$ што значи да симплекс $V_i \setminus A_i$ не припада ни комплексу L. На основу Примера 1.1, знамо да је $\Delta_{V_i} = \Delta_{V_i \setminus A^i} * \Delta_{A^i}$ а како је $L \subset K \subset \Delta_{V_1} * \cdots * \Delta_{V_k}$ и симплекси $V_1 \setminus A_1, \dots, V_k \setminus A_k$ и F не припадају комплексу L, добијамо да је комплекс L садржан у комплексу S где је:

$$\mathrm{S} = (\partial\Delta_{V_1 \setminus \{A_1\}} * \Delta_{A_1} * \cdots * \partial\Delta_{V_k \setminus \{A_k\}} * \Delta_{A_k}) \setminus \{F\}.$$

Како симплекс F не сече симплексе $V_1 \setminus A_1, \dots, V_k \setminus A_k$, а спајање комплекса комутативна и асоцијативна операција добијамо да је:

$$\begin{aligned} S &= \partial\Delta_{V_1 \setminus \{A_1\}} * \cdots * \partial\Delta_{V_k \setminus \{A_k\}} * \big((\Delta_{A_1} * \cdots * \Delta_{A_k}) \setminus \{F\}\big) \\ &= \partial\Delta_{V_1 \setminus \{A_1\}} * \cdots * \partial\Delta_{V_k \setminus \{A_k\}} * (\Delta_{A_1 \cup \cdots \cup A_k} \setminus \{A_1 \cup \cdots \cup A_k\}) \\ &= \partial\Delta_{V_1 \setminus \{A_1\}} * \cdots * \partial\Delta_{V_k \setminus \{A_k\}} * \partial\Delta_{A_1 \cup \cdots \cup A_k} \end{aligned}$$

На основу Примера 1.3, комплекс S представља триангулацију сфере димензије $|V_1 \setminus \{A_1\}| - 2 + \cdots + |V_k \setminus \{A_k\}| - 2 + |A_1 \cup \cdots \cup A_k| - 2 + k = |V_1| + \cdots + |V_k| - k + 2$. $\square$

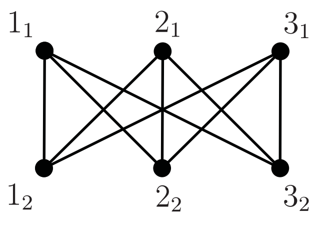
Тако закључујемо да спајањем аутодуалних симплицијалних комплекса добијамо канонске примере комплекса који имају геометријски амбијент ограничене димензије. Теорема 2.4 омогућава и ограничење димензије геометријског амбијента тополошких простора који имају триангулацију.

Последица 2.1. *Ако тополошки простор X има триангулацију K која садржи спајање k ауто-дуалних симплицијалних комплекса $K_1, \ldots, K_k$ у амбијентима кардиналности $n_1, \ldots, n_k$ таквих да је $|V(K_i)| = n_i$ за све $i \in [k]$, тада геометријски амбијент тополошког простора X је димензије веће од збира $n_1 + \cdots + n_k - k - 1$.*

Доказ: Ако поткомплекс L комплекса K нема геометријску реализацију у $\mathbb{R}^d$ тада ни K нема геометријску реализацију $\mathbb{R}^d$. Отуда, да би доказали тврђење, довољно је да приметимо да ако су $K_i \subset 2^{V_i}$ поткомплекси комплкекса K такви да је $K_1 * \cdots * K_k \subseteq K$, тада по Дефиницији 1.6 амбијенти $V_1, \ldots, V_k$ морају да буду дијсунктни јер је по претпоставци $V(K_i) = V_i$. $\square$

Занимљиво је да у претходној последици, комплекси $\Delta_{V_i \setminus \{v\}}$, који су по Примеру 2.4 ауто-дуални у амбијенту V_i, не могу да учествују у спајању.

Пример 2.7. Граф $K_{3,3}$ приказан на Фигури 10 може да се представи као спајање комплекса $\binom{[3]}{1}$ са самим собом. Како је на основу Примера 2.2 симплицијални комплекс $\binom{[3]}{1}$ ауто-дуалан у амбијенту [3], спајање $\binom{[3]}{1} * \binom{[3]}{1} = K_{3,3}$ нема геометријску реализацију у Еуклидском простору димензије $3 + 3 - 2 - 1 = 2$ односно $K_{3,3}$ није планаран граф.



Фигура 10: Граф $K_{3,3}$ као спајање $\binom{[3]}{1} * \binom{[3]}{1}$.

Сви једнодимензионални симплицијални комплекси су триангулације графова. У [22], Поглавље 1.6, је доказано да сваки симплицијални комплекс димензије d има геометријску реализацију у простору $\mathbb{R}^{2d+1}$. Отуда, сваки граф има геометријски амбијент $\mathbb{R}^3$ па, да би доказали да граф Γ није планаран, на основу Последице 2.1 потребно је да докажемо да Γ садржи спајање аутодуалних симплицијалних комплекса. Како је димензија спајања комплекса K и L једнака $\dim K + \dim L + 1$, једини могући кандидати су спајање аутодуалних комплекса димензије 0 или аутодуални комплекс димензије 1 (при том, комплекси нису из Примера 2.4). Као што ћемо да видимо у Примерима 3.3 и 3.4, графови $K_{3,3}$ и K_5 су једини (до на изоморфизам) једнодимензионални примери спајања ауто-дуалних комплекса у којима не учествују ауто-дуални комплекси $\Delta_{V\setminus\{v\}} \subseteq 2^V$. Отуда, ако граф Γ садржи $K_{3,3}$ или K_5, на основу Последице 2.1 он није планаран. Међутим, овај услов је у извесном смислу и довољан.

Позната Теорема Куратовског представљена у [20] из 1930$-$е године тврди да граф који није планаран мора да садржи граф $K_{3,3}$ или K_5 или њихове ре-триангулације односно, проблем планарности графа је потпуно решен помоћу ауто-дуалних симплицијалних комплекса.

Слични резултати постоје и за дводимензионалне симплицијалне комплексе који нису планарни. По Последици 2.1, ако покажемо да комплекс K садржи аутодуалан симплицијални комплекс са 5 темена или граф $K_{3,3}$, дати комплекс не може да има геометријску реализацију у простору $\mathbb{R}^2$ (остале могућности за спајање не постоје јер су по Примеру 3.3 сви аутодуални комплекси у амбијенту [4] који садрже све врхове једнодимензионални).

Халин и Јунг су 1964$-$е у [12] доказали да симплицијални комплекс K има геометријску реализацију у простору $\mathbb{R}^2$, акко K не садржи комплексе изоморфне комплексима

$$K_{3,3}, K_5, HJ_1 = \Delta_{[4]}, HJ_2 = \partial\Delta_{[4]} \cup \Delta_{\{5\}},$$

$$HJ_3 = (\partial\Delta_{[3]} \cup \Delta_{\{4\}}) * \Delta_{\{5\}}, HJ_4 = \Delta_{[2]} * \partial\Delta_{\{3,4\}} \cup \partial\Delta_{[2]} * \Delta_{\{5\}} \cup \Delta_{\{3,4\}},$$

$$HJ_5 = \binom{3}{1} * \Delta_{\{4,5\}}, HJ_6 = \Delta_{[3]} \cup \binom{3}{1} * \partial\Delta_{\{4,5\}}$$

или њиховим ре-триангулацијама. Међутим, као што ћемо да видимо у Примеру 3.4, сваки аутодуални комплкекс у амбијенту [5] је изоморфан неком од комплекса $K_5, HJ_1, \ldots, HJ_6$.

Дакле, питање планарности симплицијалних комплекса је употпуности решено помоћу ауто-дуалних симплицијалних комплекса. Да би слична тврђења могла да се формирају у већим димензијама, потребно је одредити све аутодуалне комплексе у задатом амбијенту.

3 Конструкција, комбинаторна структура и класификација ауто-дуалних симплицијалних комплекса

У овом поглављу дајемо опис две универзалне технике конструкције свих аутодуалних симплицијалних комплекса у датом амбијенту V које обезбеђују нови увид у њихову комбинаторну структуру. Сва тврђења и докази су објављни у [32].

3.1 Реконструкција аутодуалних комплекса

У овом одељку анализирамо посебну технику тзв. реконструкције ауто-дуалних симплицијалних комплекса K у фиксираном амбијенту V. Метод је базиран на опсервацији Сергеја Мелхикова који је раду у [23] приметио да различите ауто-дуалне комплексе можемо да добијемо разменом парова комплементарних симплекса.

Присетимо се да је $A \subseteq V$ главни симплекс симплицијалног комплекса $K \subseteq 2^V$ ако A није страна ни једног другог симплекса комплекса K тј.

$$(\forall B \in K)\, A \not\subset B.$$

Еквивалентно, симплекс $A \in K$ је главни акко је $K \setminus \{A\}$ симплицијални комплекс.

Операција реконструкције ауто-дуалног симплицијалног комплекса K престројавањем главног симплекса A, у ознаци $rs_A(K)$, је уско повезана са бистеларним операцијама описаним у Поглављу 2.1.

Тврђење 3.1. *Нека је $K \subseteq 2^V$ ауто-дуалан симплицијални комплекс и нека је $A \in K$ главни симплекс. Тада*

$$rs_A(K) = (K \setminus \{A\}) \cup \{V \setminus A\}$$

је такође ауто-дуалан симплицијални комплекс.

Доказ: Прво, $K \setminus \{A\}$ је симплицијални комплекс јер је A главни симплекс. Нека је $B \subset V \setminus A$ произвољан. То значи да је $A \subset V \setminus B$, а како је A главни симплекс комплекса K, добијамо да $V \setminus B$ као његов надсимплекс не припада комплексу K. Отуда, по Теореми 2.3, симплекс B мора да припада комплексу K јер је K ауто-дуалан. Тако смо доказали да комплекс $K \setminus \{A\}$ садржи све праве стране симплекса $V \setminus A$ па, $(K \setminus \{A\}) \cup \{V \setminus A\}$ је симплицијални комплекс.

Друго, комплекс $rs_A(K)$ је аутодуалан. Довољно је да приметимо да за произвољан $B \in 2^V \setminus \{A, V \setminus A\}$, тачно један од симплекса $B, V \setminus B$ припада комплексу $K \setminus \{A\}$ (јер K је ауто-дуалан) и да $A \notin rs_A(K)$ док $V \setminus A \in rs_A(K)$. $\square$

Следеће тврђење показује да је техника реконструкција довољна за одређивање свих ауто-дуалних симплицијалних комплекса у датом амбијенту.

Тврђење 3.2. *Нека су K и L произвољни ауто-дуални симплицијални комплекси у амбијенту V. Тада, комплекс L може да се добије од комплекса K низом реконструкција добијених престројавањем симплекса скупа $K \setminus L$.*

Доказ: Нека је $K \setminus L = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ где су симплекси A_i уређени опадајуће по димензији (односно нека је $|A_i| \geq |A_{i+1}|$ за све $i \in [n]$). Нека је $K_0 = K$ и нека је $K_i = (K_{i-1} \setminus \{A_i\}) \cup \{V \setminus A_i\}$. Да би доказали да је $K_0, K_1, \ldots, K_n$ добар низ узастопних реконструкција, довољно је да покажемо да је A_i главни симплекс комплекса K_{i-1}.

Прво, приметимо да је A_1 главни симплекс комплекса $K_0 = K$. У супротном, постојао би симплекс $B \in K$ такав да је $A_1 \subset B$ а овај симплекс би припадао и комплексу L јер је $|B| > |A_i|$ за све $i \in [n]$. Како је L симплицијални комплекс, добијамо да симплекс A_1 такође припада комплексу L што није могуће. Отуда, A_1 може да буде престројен па је по Тврђењу 3.1 комплекс K_1 ауто-дуалан.

Претпоставимо индуктивно да је A_{i-1} главни симплекс комплекса K_{i-2} односно да је и A_{i-1} ауто-дуалан симплицијални комплекс.

Ако A_i није главни симплекс комплекса $K_{i-1} = (K \setminus \{A_1, \ldots, A_{i-1}\}) \cup \{V \setminus A_1 \ldots, V \setminus A_{i-1}\}$, тада би постојао симплекс $B \in K_{i-1}$ такав да $A_i \subset B$. Знамо да A_i не припада комплексу L па, симплекс B такође не може да припада комплексу L. Отуда, B је симплекс фамилије $K \setminus L$ такав да је $|B| > |A_i|$ што на основу конструкције знчи да је B један од симплекса $A_1, \ldots, A_{i-1}$. Међутим, ови симплекси не припадају комплексу K_{i-1}.

На крају, како су K и L ауто-дуални, по Теореми 2.3 добијамо да је:

$$A \in K \setminus L \Leftrightarrow A \in K \wedge A \notin L \Leftrightarrow V \setminus A \notin K \wedge V \setminus A \in L \Leftrightarrow V \setminus A \in L \setminus K.$$

Отуда је $L \setminus K = \{V \setminus A_i \mid i \in [n]\}$ па добијамо да је:

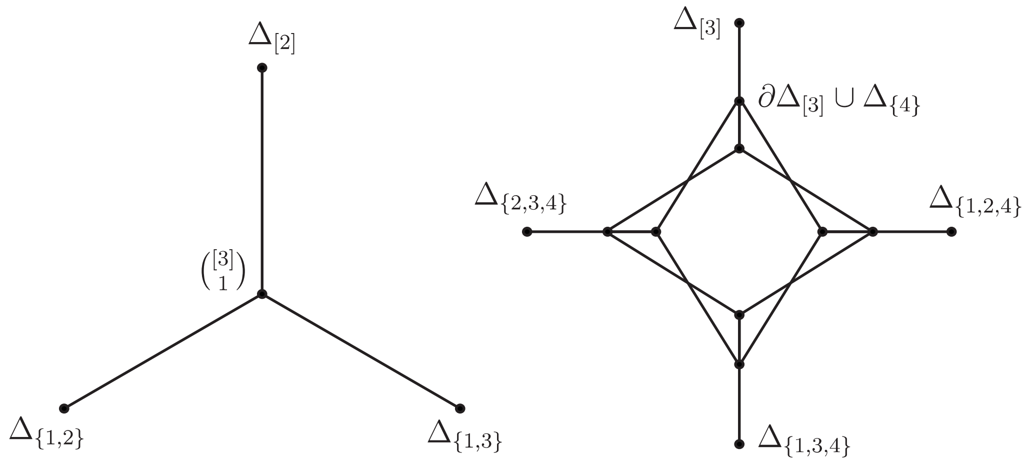
$$K_n = (K \setminus \{A_1, \ldots, A_n\}) \cup \{V \setminus A_1 \ldots, V \setminus A_n\} = \big(K \setminus (K \setminus L)\big) \cup (L \setminus K) = L.$$

Ово комплетира доказ. $\square$

Дакле, произвољан ауто-дуалан симплицијални комплекс у амбијенту V може да се се добије од било којег ауто-дуалног комплекса $K \subset 2^V$ низом реконструкција.

Пример 3.1. Комплекс $\Delta_{\{1,2\}}$ је на основу Примера 2.4 ауто-дуалан у амбијенту $[3]$. Он има само један главни симплекс $\{1,2\}$ и његовим престројавањем добијамо комплекс $\binom{[3]}{1}$ који је такође аутодуалан у амбијенту $[3]$ и има 3 главна симплекса $\{1\},\{2\}$ и $\{3\}$. Ако реконструишемо комлекс $\binom{[3]}{1}$, престројавањем симплекса $\{1\}$ или $\{2\}$ или $\{3\}$, добијамо комплексе $\Delta_{\{2,3\}}$ или $\Delta_{\{1,3\}}$ или $\Delta_{\{1,2\}}$ такве да њиховом реконструкцијом поново добијамо комплекс $\binom{[3]}{1}$. Тако закључујемо да у амбијенту $[3]$ постоје тачно 4 ауто-дуална комплекса $\Delta_{\{1,2\}}, \Delta_{\{2,3\}}, \Delta_{\{1,3\}}, \binom{[3]}{1}$.

Као што смо видели у Примеру 3.1, узастопним реконструкцијама датог ауто-дуалног комплекса некада добијемо исте симплицијалне комплексе. Зато, да би анализирали реконструкције које производе различите комплексе, уводимо појам графа реконструкција $(\mathcal{D}^{[n]}, \mathcal{NG}_n)$ (или укратко графа суседства $\mathcal{NG}_n$). Чворови овог графа су сви ауто-дуални симплицијални комплекси у амбијенту $[n]$ а гране одговарају паровима комплекса $\{K, L\}$ где је симетрична разлика комплекса K и L једнака $\{A, [n]\setminus A\}$. Другим речима, комплекси K и L су повезани граном акко комплекс K може да се добије од комплекса L престројавањем симплекса A или комплекс L може да се добије од комплекса K престројавањем симплекса $[n]\setminus A$. Графови $\mathcal{NG}_3$ и $\mathcal{NG}_4$ су приказани на Фигури 11.



Фигура 11: Графови $\mathcal{NG}_3$ и $\mathcal{NG}_4$.

Приметимо да на основу Тврђења 3.2, у графу $\mathcal{NG}_n$, ауто-дуални комплекси K и L могу да се повежу путем дужине $|K \setminus L|$ а као што ћемо ускоро да покажемо, не постоји краћи пут који повезује K и L. Такође, степен чвора K графа $\mathcal{NG}_n$ једнак је броју главних симплекса комплекса K јер реконструкције добијене престројавањем различитих главних симплекса производе различите симплицијалне комплексе.

Тврђење 3.3. *Нека је $n \in \mathbb{N}$ произвољно.*

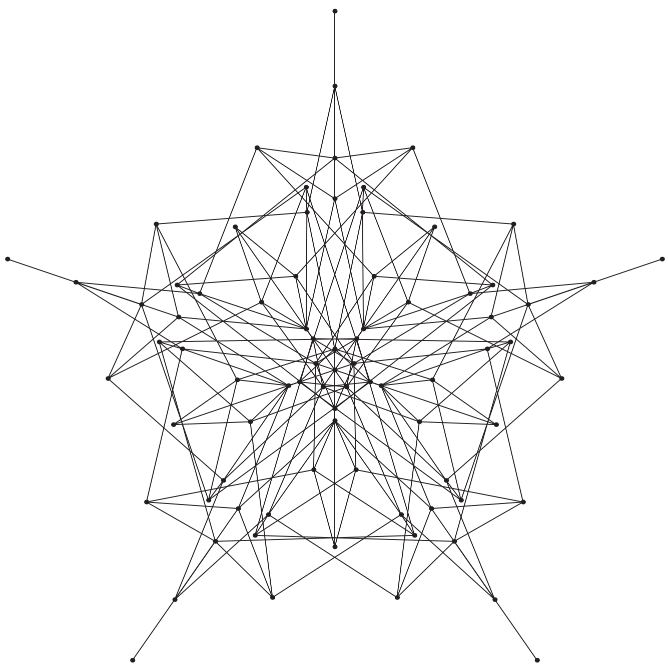
(1) *Произвољан пут $\{K_0, K_1, \ldots, K_m\}$ у графу $\mathcal{NG}_n$ који повезује комплексе K и L је такав да је $m \geq |K \setminus L|$ и $m \equiv |K \setminus L| \mod 2$.*

(2) *Све петље графа $\mathcal{NG}_n$ су парне дужине..*

Доказ: Нека је $\{K_0, K_1, \ldots, K_m\}$ низ реконструкција добијених преструјавањем симплекса $\{A_1, \ldots, A_m\}$ редом. Тада, $K_m = (K_0 \setminus \{A_1, \ldots, A_m\}) \cup \{[n] \setminus A_1 \ldots, [n] \setminus A_m\}$, а како је $K_m = L$ и $K_0 = K$, фамилија симплекса $K \setminus L$ мора да буде садржана у скупу $\{A_1, \ldots, A_m\}$ што потврђује да је $|K \setminus L| \leq m$. Такође, ако постоји $i \in [m]$ тако да симплекс A_i није један од симплекса разлике $K \setminus L$, тада скуп $\{A_1, \ldots, A_m\}$ мора да садржи и симплекс $[n] \setminus A_i$ јер би у супротном $K_m = L$ садржао $[n] \setminus A_i$ што није могуће. Ово доказује тврђење **(1)** а тврђење **(2)** је очигледна последица. $\square$

Како су све петље у графу $\mathcal{NG}_n$ парне дужине, као последицу добијамо следеће тврђење.

Последица 3.1. *Граф суседства $\mathcal{NG}_n$ је бипартитан за све $n \in \mathbf{N}$.*



Фигура 12: Граф $\mathcal{NG}_5$ са 81 чворова.

Анализа особина графа $\mathcal{NG}_n$ може да открије многе особине ауто-дуалних симплицијалних комплекса, посебно број различитих ауто-дуалних комплекса у датом амбијенту.

Техника добијања ауто-дуалних комплекса методом реконструкције није превише технички захтевна и може да се испрограмира на већини програмских језика. Ради формирања базе за истраживање, у програмском пакету $\mathrm{Wolfram\ Mathematica}$ конструисан је алоритам помоћу којег су добијени сви ауто-дуални симплицијални комплекси у амбијентима довољно мале кардиналности. Граф суседства ауто-дуалних комплекса у амбијенту $[5]$ добијених помоћу рачунара је приказан на Фигури 12.

На овај начин добијена је врло велика база различитих ауто-дуалних комплекса. Међутим, методом реконструкције не могу да се препознају изоморфни симплицијални комплекси. Ради оптимизације добијених резултата, у наставку ће да буде описан нови метод конструкције ауто-дуалних комплекса који значајно поједностављује њихову комбинаторну класификацију.

3.2 Оператор корена

У овом одељку уводимо *оператор корена*, главни алат за даљу анализу ауто-дуалних симплицијалних комплекса.

Као што смо видели у Тврђењу 3.2, сваки пар ауто-дуалних комплекса у амбијенту $[n]$ може да се повеже у графу суседства $\mathcal{NG}_n$ низом ауто-дуалних симплицијалних комплекса. У овом одељку анализираћемо низове који почињу ауто-дуалним комплексом $\Delta_{[n-1]}$.

Прво уводимо дефиницију стандардног „комплемент" оператора фамилије скупова $\mathbf{C}^n : 2^{2^{[n]}} \to 2^{2^{[n]}}$ са:

$$\mathbf{C}^n(K) = \{[n] \setminus A \mid A \in K\}. \tag{3.1}$$

Ако $2^{[n]}$ посматрамо као фамилију парцијално уређену релацијом инклузије, оператор $\mathbf{C}^n$ можемо природно да интерпретирамо као симетрију у односу на центар посета као што је приказано на Фигури 13.

Неколико елементарних својстава комплемент оператора наводимо у следећој леми ради будућих референци.

Лема 3.1. *Нека су K и L произвољне фамилије скупова у амбијенту $[n]$. Оператор $\mathbf{C}^n$ има следећа својства:*

(1) *Ако је $K \subseteq L$ тада је $\mathbf{C}^n(K) \subseteq \mathbf{C}^n(L)$.*

(2) *За произвољну операцију $\diamond \in \{\cup, \cap, \setminus\}$ важи $\mathbf{C}^n(K \diamond L) = \mathbf{C}^n(K) \diamond \mathbf{C}^n(L)$.*

(3) *Фамилија K је симплицијални комплекс акко*
$$\big(\forall A \in \mathbf{C}^n(K)\big)\big(\forall B \subseteq [n]\big) A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathbf{C}^n(K).$$

(4) $\mathbf{C}^n\big(\mathbf{C}^n(K)\big) = K$.

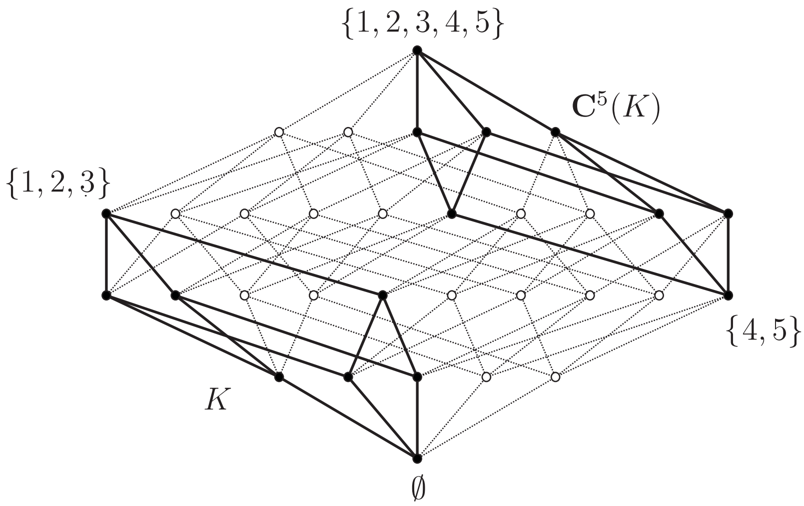
(5) $\mathbf{C}^n(2^{[n]} \setminus K) = 2^{[n]} \setminus \mathbf{C}^n(K)$.

(6) *За све* $m \geq n$, *Александеров дуал* $\widehat{K}^{[m]}$ *симӣлицијалноī комӣлекса* K *је једнак* $\mathbf{C}^m(2^{[m]} \setminus K)$.

Доказ: Својства **(1)** до **(3)** су елементарне последице дефиниције комплемент оператора. За својство **(4)**, довољно је да приметимо да је $A \subset B$ акко је $[n] \setminus A \subset [n] \setminus B$. Отуда, фамилија K инваријантна у односу на потскупове акко је фамилија $\mathbf{C}^n(K)$ инваријантна у односу на натскупове.

За својство **(5)**, приметимо да је на основу својства **(2)** резултат комплемент оператора $\mathbf{C}^n(2^{[n]} \setminus K)$ једнак $\mathbf{C}^n(2^{[n]}) \setminus \mathbf{C}^n(K)$ а очигледно је $\mathbf{C}^n(2^{[n]}) = 2^{[n]}$.

За својство **(6)**, по Дефиницији 2.1, знамо да је Александеров дуал комплекса K у амбијенту $[m]$ једнак $\{[m] \setminus A \mid A \in 2^{[m]} \setminus K\}$ а ово је по (3.1) управо $\mathbf{C}^m(2^{[m]} \setminus K)$. $\square$



Фигура 13: Оператор $\mathbf{C}^5$ примењен на $\Delta_{[3]}$.

Приметимо да је на основу својства **(5)** Леме 3.1 Александеров дуал комплекса K у амбијенту $[m]$ такође једнак $2^{[m]} \setminus \mathbf{C}^m(K)$.

Лема 3.2. *Нека су* K *и* L *симӣлицијални комӣлекси у амбијенӣу* $[n]$ *и* $m \geq n$. *Тада:*

(1) $\widehat{K \cup L}^{[m]} = \widehat{K}^{[m]} \cap \widehat{L}^{[m]}$,

(2) $\widehat{K \cap L}^{[m]} = \widehat{K}^{[m]} \cup \widehat{L}^{[m]}$.

Ако је $K \subseteq 2^{[n]}$ *симплицијални комплекс и* $L \subseteq 2^{[n]}$ *фамилија скупова таква да је* $K \setminus L$ *симплицијални комплекс тада је:*

(3) $\widehat{K \setminus L}^{[m]} = \widehat{K}^{[m]} \setminus \mathbf{C}^m(L)$.

Доказ: Користећи особине **(2)** и **(5)** Леме 3.1 добијамо:

(1) $\widehat{K \cup L}^{[m]} = 2^{[m]} \setminus \mathbf{C}^m(K \cup L) = 2^{[m]} \setminus \big(\mathbf{C}^m(K) \cup \mathbf{C}^m(L)\big)$
$= \big(2^{[m]} \setminus \mathbf{C}^m(K)\big) \cap \big(2^{[m]} \setminus \mathbf{C}^m(L)\big) = \widehat{K}^{[m]} \cap \widehat{L}^{[m]}$,

(2) $\widehat{K \cap L}^{[m]} = 2^{[m]} \setminus \mathbf{C}^m(K \cap L) = 2^{[m]} \setminus \big(\mathbf{C}^m(K) \cap \mathbf{C}^m(L)\big)$
$= \big(2^{[m]} \setminus \mathbf{C}^m(K)\big) \cup \big(2^{[m]} \setminus \mathbf{C}^m(L)\big) = \widehat{K}^{[m]} \cap \widehat{L}^{[m]}$,

(3) $\widehat{K \setminus L}^{[m]} = 2^{[m]} \setminus \mathbf{C}^m(K \setminus L) = 2^{[m]} \setminus \big(\mathbf{C}^m(K) \setminus \mathbf{C}^m(L)\big)$
$= 2^{[m]} \setminus \Big(\mathbf{C}^m(K) \cap \big(2^{[m]} \setminus \mathbf{C}^m(L)\big)\Big)$
$= \big(2^{[m]} \setminus \mathbf{C}^m(K)\big) \cup \mathbf{C}^m(L) = \widehat{K}^{[m]} \cup \mathbf{C}^m(L)$. □

Тврђење 3.2 нам показује да је симетрична разлика произвољних ауто-дуалних комплекса K и L у амбијенту $[n]$ једнака $(L \setminus K) \cup \mathbf{C}^n(L \setminus K)$. Уместо комплекса L користићемо симплицијални комплекс $\Delta_{[n-1]} = 2^{[n-1]}$ који је ауто-дуалан у амбијенту $[n]$. У наставку ћемо да анализирамо фамилије симплекса које се јављају као разлика $2^{[n-1]} \setminus K$ за произвољан $K \in \mathcal{D}^{[n]}$.

Тврђење 3.4. *Нека је* K *ауто-дуалан симплицијални комплекс у амбијенту* $[n]$*. Тада, фамилија симплекса* $\mathbf{C}^{n-1}(2^{[n-1]} \setminus K)$ *је под-дуалан симплицијални комплекс у амбијенту* $[n-1]$.

Доказ: Нека је $A \in 2^{[n-1]} \setminus K$ произвољан и $B \subseteq [n-1]$ такав да је $A \subseteq B$. Тада, како симплекс A не припада симплицијалном комплексу K, симплекс B такође не припада комплексу K што значи да B припада фамилији $2^{[n-1]} \setminus K$. Ово по Леми 3.1, својства **(3)** и **(4)**, доказује да је $\mathbf{C}^{n-1}(2^{[n-1]} \setminus K)$ симплицијални комплекс.

Да би доказали да је овај комплекс под-дуалан, проверимо својство **(1)** Теореме 2.3. Нека је $A \subseteq [n-1]$ симплекс такав да A и његов комплемент $[n-1] \setminus A$ припадају фамилији $\mathbf{C}^{n-1}(2^{[n-1]} \setminus K)$. Ако применимо комплемент оператор на инклузију $\{A, [n-1] \setminus A\} \subset \mathbf{C}^{n-1}(2^{[n-1]} \setminus K)$, користећи својства **(1)** и **(4)** Леме 3.1 добијамо $\{[n-1] \setminus A, A\} \subset 2^{[n-1]} \setminus K$, што имплицира да симплекси A и $[n-1] \setminus A$ не припадају K. Како је K симплицијални комплекс, то значи да $A \cup \{n\}$ и $[n-1] \setminus A = [n] \setminus (A \cup \{n\})$ такође не припадају комплексу K што по Теореми 2.3 противуречи претпоставци да је комплекс K ауто-дуалан у амбијенту $[n]$. □

Отуда, сваком ауто-дуалном комплексу у амбијенту $[n]$ можемо да доделимо под-дуалан комплекс у амбијенту $[n-1]$.

Дефиниција 3.1. *Оператор корена је пресликавање* $\sqrt{}\, : \mathcal{D}^{[n]} \to \mathcal{SD}^{[n-1]}$ *које дефинишемо са:*

$$\sqrt{K} = \mathbf{C}^{n-1}(2^{[n-1]} \setminus K).$$

Приметимо да, имајући у виду својство **(6)** Леме 3.1, корени комплекс ауто-дуалног симплицијалног комплекса у амбијенту $[n]$ можемо да посматрамо као његов Александеров дуал у мањем амбијенту $[n-1]$. Доказаћемо да је овај оператор бијективан тако што ћемо да конструишемо његов инверзни оператор.

Ако узмемо у обзир Тврђење 3.2, комплементаран скуп под-дуалном комплепксу у амбијенту $[n-1]$ треба да буде облика $2^{[n-1]} \setminus K$ за неки комплекс $K \in \mathcal{D}^{[n]}$. Ова опсервација нам омогућава да формулишемо следеће тврђење.

Тврђење 3.5. *Ако је* K *произвољан под-дуалан симплицијални комплекс у амбијенту* $[n-1]$*, тада, фамилија* $L = \big(2^{[n-1]} \setminus \mathbf{C}^{n-1}(K)\big) \cup \mathbf{C}^{n}\big(\mathbf{C}^{n-1}(K)\big)$ *је ауто-дуалан симплицијални комплекс у амбијенту* $[n]$.

Доказ: Као у доказу Тврђења 3.2, како је $\Delta_{[n-1]} = 2^{[n-1]}$ ауто-дуалан у амбијенту $[n]$, довољно је да покажемо да комплекс L може да се добије од комплекса $\Delta_{[n-1]}$ престројавањем симплекса који припадају скупу $\mathbf{C}^{n-1}(K)$.

Прво, приметимо да је $\mathbf{C}^{n}\big(\mathbf{C}^{n-1}(\{A\})\big) = \{[n]\setminus([n-1]\setminus A)\} = \{A \cup \{n\}\}$.

Нека је $\mathbf{C}^{n}(K) = \{[n-1] \setminus A_1, \ldots, [n-1] \setminus A_k\}$ где је $|A_{i+1}| \leq |A_i|$ за све $i \in [k-1]$. Нека је $K_0 = \Delta_{[n-1]}$ и $K_i = \big(K_{i-1} \setminus \{[n-1] \setminus A_i\}\big) \cup \big\{A_i \cup \{n\}\big\}$. Тада, комплекси K_i су облика:

$$K_i = \big(2^{[n-1]} \setminus \{[n-1] \setminus A_1, \ldots, [n-1] \setminus A_i\}\big) \cup \big\{A_1 \cup \{n\}, \ldots, A_i \cup \{n\}\big\}.$$

Покажимо да је симплекс $[n-1] \setminus A_i$ главни симплекс комплекса K_{i-1} индукцијом. Наравно, симплекс $[n-1] \setminus A_i$ припада комплексу K_{i-1}. Како је $A_1 = \emptyset$, имамо да је $[n-1] \setminus A_1 = [n-1]$ а овај симплекс је једини главни симплекс комплекса $K_0 = \Delta_{[n-1]}$. Претпоставимо да $[n-1] \setminus A_i$ није главни у K_{i-1} односно да постоји симплекс $B \in K_i$ такав да је $[n-1] \setminus A_i \subset B$. Како је K симплицијални комплекс, по Леми 3.1 својство **(3)**, сви симплекси скупа $2^{[n-1]}$ који садрже симплекс A_i морају да припадају фамилији симплекса $\{[n-1] \setminus A_1, \ldots, [n-1] \setminus A_{i-1}\}$ јер је $|B| > |[n] \setminus A_i| \geq |[n] \setminus A_j|$ за све $j \in [i-1]$. Отуда $B \notin 2^{[n-1]}$ што значи да симплекс B, да би био надсимплекс симплекса $[n-1] \setminus A_i$, мора да буде један од симплекса $\big\{A_1 \cup \{n\}, \ldots, A_{i-1} \cup \{n\}\big\}$. Ако је, на пример, $B = A_j \cup \{n\}$ односно $[n] \setminus A_i \subset A_j \cup \{n\}$ за неко $j < i$, добијамо да $A_i \supset [n] \setminus (A_j \cup \{n\})$ а пошто $n \notin A_j$ добијамо да $A_i \supset [n-1] \setminus A_j$. Како $A_i \in K$ добијамо да $[n-1] \setminus A_j$ припада комплексу

K. Дакле A_j и $[n-1] \setminus A_j$ припадају комплексу K али то по Теореми 2.3 противуречи претпоставци да је комплекс K под-дуалан.

Отуда, A_i је главни симплекс комплекса K_{i-1} што на основу Тврђења 3.1 доказује да су сви комплекси K_i ауто-дуални у амбијенту $[n]$, укључујући и $K_k = L$. $\square$

Претходно тврђење нам омогућава да дефинишемо нови оператор.

Дефиниција 3.2. *Оператор надградње је пресликавање* $\Lambda : \mathcal{SD}^{[n-1]} \to \mathcal{D}^{[n]}$ *које дефинишемо са*

$$\Lambda K = \big(2^{[n-1]} \setminus \mathbf{C}^{n-1}(K)\big) \cup \mathbf{C}^n\big(\mathbf{C}^{n-1}(K)\big).$$

Симплицијални комплекс ΛK ћемо да зовемо дуална надградња комплекса K. Касније у Поглављу 3.3 ће да буду дате нове, вероватно елегантније варијанте оператора $\surd$ и Λ.

Покажимо сада да је $\Lambda : \mathcal{SD}^{[n-1]} \to \mathcal{D}^{[n]}$ управо инверзни оператор оператора $\surd$.

Нека је $K \in \mathcal{D}^{[n]}$ произвољан. Користећи тврђења Леме 3.1, добијамо следећи низ једнакости

$$\begin{aligned}
\Lambda \circ \surd(K) &= \Lambda\big(\mathbf{C}^{n-1}(2^{[n-1]} \setminus K)\big) \\
&= \big[2^{[n-1]} \setminus \mathbf{C}^{n-1}\big(\mathbf{C}^{n-1}(2^{[n-1]} \setminus K)\big)\big] \cup \mathbf{C}^n\big[\mathbf{C}^{n-1}\big(\mathbf{C}^{n-1}(2^{[n-1]} \setminus K)\big)\big] \\
&= \big(2^{[n-1]} \setminus (2^{[n-1]} \setminus K)\big) \cup \mathbf{C}^n(2^{[n-1]} \setminus K) \\
&= (K \cap 2^{[n-1]}) \cup \mathbf{C}^n(2^{[n-1]} \setminus K).
\end{aligned}$$

Како су комплекси $2^{[n-1]}$ и K ауто-дуални у амбијенту $[n]$, на основу Теореме 2.3 имамо да је:

$$A \in \mathbf{C}^n(2^{[n-1]} \setminus K) \Leftrightarrow [n] \setminus A \in 2^{[n-1]} \setminus K \Leftrightarrow ([n] \setminus A \in 2^{[n-1]} \wedge [n] \setminus A \notin K)$$

$$\Leftrightarrow (A \notin 2^{[n-1]} \wedge A \in K) \Leftrightarrow A \in K \setminus 2^{[n-1]}.$$

Отуда $\mathbf{C}^n(2^{[n-1]} \setminus K) = K \setminus 2^{[n-1]}$ па добијамо да је:

$$\Lambda \circ \surd(K) = (K \cap 2^{[n-1]}) \cup (K \setminus 2^{[n-1]}) = K.$$

Дакле, композиција $\Lambda \circ \surd$ је идентичко пресликавање.

Пре него што истражимо композицију $\surd \circ \Lambda$, докажимо још пар својстава комплемент оператора $\mathbf{C}^n$.

Лема 3.3. *Нека је $K \subseteq 2^{[n]}$ произвољна фамилија скупова. Тада, за свако $m \geq n$ важи:*

(1) $\mathbf{C}^m \circ \mathbf{C}^n(K) = \{A \cup ([m] \setminus [n]) \mid A \in K\}$;

(2) $\mathbf{C}^n \circ \mathbf{C}^m \circ \mathbf{C}^n = \mathbf{C}^n$.

Доказ: Помоћу дефиниције (3.1) добијамо:
(1) $\mathbf{C}^m\big(\mathbf{C}^n(K)\big) = \{[m]\setminus([n]\setminus A) \mid A \in K\} = \{[m]\setminus\big([m]\setminus\big[(A\cup([m]\setminus[n])\big]\big) \mid A \in K\} = \{A \cup ([m] \setminus [n]) \mid A \in K\}$.
(2) $\mathbf{C}^n \circ \big(\mathbf{C}^m \circ \mathbf{C}^n(K)\big) = \{[n]\setminus\big(A\cup([m]\setminus[n])\big) \mid A \in K\} = \{([n]\setminus A)\cap\big([n]\setminus([m]\setminus[n])\big) \mid A \in K\} = \{([n]\setminus A)\cap[n] \mid A \in K\} = \{[n]\setminus A \mid A \in K\} = \mathbf{C}^n(K)$.
□

Сада, нека је $K \in \mathcal{SD}^{[n-1]}$ произвољан. Користећи Леме 3.1 и 3.3 добијамо:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\ } \circ \Lambda(K) &= \mathbf{C}^{n-1}\big(2^{[n-1]} \setminus \Lambda(K)\big) = 2^{[n-1]} \setminus \mathbf{C}^{n-1}\big(\Lambda(K)\big) \\
&= 2^{[n-1]} \setminus \mathbf{C}^{n-1}\big[\big(2^{[n-1]} \setminus \mathbf{C}^{n-1}(K)\big) \cup \mathbf{C}^n\big(\mathbf{C}^{n-1}(K)\big)\big] \\
&= 2^{[n-1]} \setminus \big[\mathbf{C}^{n-1}\big(2^{[n-1]} \setminus \mathbf{C}^{n-1}(K)\big) \cup \mathbf{C}^{n-1}\big(\mathbf{C}^n(\mathbf{C}^{n-1}(K))\big)\big] \\
&= 2^{[n-1]} \setminus \big[2^{[n-1]} \setminus \mathbf{C}^{n-1}\big(\mathbf{C}^{n-1}(K)\big) \cup \mathbf{C}^{n-1}(K)\big] \\
&= 2^{[n-1]} \setminus \big[(2^{[n-1]} \setminus K) \cup \mathbf{C}^{n-1}(K)\big] \\
&= \big[2^{[n-1]} \setminus (2^{[n-1]} \setminus K)\big] \cap \big[2^{[n-1]} \setminus \big(\mathbf{C}^{n-1}(K)\big)\big] \\
&= K \cap \widehat{K}^{[n-1]} = K.
\end{aligned}
$$

Последња једнакост важи јер по Дефиницији 2.3 комплекс је K поткомплекс комплекса $K^{[n-1]}$.

Сума сумарум, добили смо следеће тврђење.

Тврђење 3.6. *Оператор корена $\sqrt{\ } : \mathcal{D}^{[n]} \to \mathcal{SD}^{[n-1]}$ је бијективан а њему инверзни је оператор надградње $\Lambda : \mathcal{SD}^{[n-1]} \to \mathcal{D}^{[n]}$.*

Следећа теорема је моментална последица претходног тврђења.

Теорема 3.1. *Број ауто-дуалних симплицијалних комплекса у амбијенту $[n]$ једнак је броју под-дуалних симплицијалних комплекса у амбијенту $[n-1]$.*

Дакле, сваки ауто-дуалан симплицијални комплекс у амбијенту $[n]$ можемо да добијемо надградњом под-дуалних комплекса у амбијенту $[n-1]$. Још једна комбинаторно занимљива примена Теореме 3.1 ће да буде дата у Поглављу 5.

3.3 Геометријски опис оператора $\surd$ и Λ

У овом одељку дајемо елегантнији опис оператора $\surd$ и Λ помоћу концепата уведених у Поглављу 1.2.

Прво наводимо нову комбинаторну технику за налажење линка произвољног симплекса у датом симплицијалном комплексу.

Лема 3.4. *За дати симплицијални комплекс $K \subseteq 2^V$ и произвољан симплекс $A \in K$, поткомплекс $\mathrm{Lk}(A)$ формирају сви симплекси $B \in K$ који не садрже симплекс A такви да је $A \cup B \in K$.*

Доказ: Користећи Дефиницију 1.5 добијамо следећи низ еквиваленција

$$B \in \mathrm{Lk}(A) \Leftrightarrow B \in \mathrm{Nh}(A) \setminus \mathrm{st}(A) \Leftrightarrow B \in \mathrm{Nh}(A) \wedge B \notin \mathrm{st}(A)$$

$$\Leftrightarrow B \subseteq F \wedge F \in \mathrm{st}(A) \wedge A \nsubseteq B \Leftrightarrow B \subseteq F \wedge A \subseteq F \wedge F \in K \wedge A \nsubseteq B$$

$$\Leftrightarrow B \cup A \subseteq F \wedge F \in K \wedge A \nsubseteq B.$$

Отуда, $\mathrm{Lk}(A) = \{B \in K \mid A \nsubseteq B, B \cup A \in K\}$. □

Тврђење 3.7. *За произвољан ауто-дуалан комплекс K у амбијенту $[n]$ важи:*

$$\surd K = \mathrm{Lk}(\{n\}).$$

Доказ: Нека је $K \subseteq 2^{[n]}$ ауто-дуалан симплицијални комплекс и нека је $A \in \surd K$ произвољан симплекс. Тада, по Дефиницији 3.1, симплекс A припада комплексу $\mathbf{C}^{n-1}(2^{[n-1]} \setminus K)$ па је облика $[n-1] \setminus B$ где је $B \subseteq [n-1]$ и $B \notin K$. Како је комплекс K ауто-дуалан у амбијенту $[n]$ и $B \notin K$, по Теореми 2.3 симплекс $[n] \setminus B$ припада симплицијалном комплексу K што значи да и његов потсимплекс $[n-1] \setminus B = A$ такође припада K. Како је $A \subseteq [n-1]$ он не садржи врх $\{n\}$. Дакле, симплекс A је такав да $\{n\} \nsubseteq A$ и $A \cup \{n\} = ([n-1] \setminus B) \cup \{n\} = [n] \setminus B \in K$ што по Леми 3.4 имплицира да $A \in \mathrm{Lk}(\{n\})$. Отуда $\surd K \subseteq \mathrm{Lk}(\{n\})$.

Нека је $A \in \mathrm{Lk}(\{n\})$ произвољан. Тада, на основу Леме 3.4, A је симплекс комплекса K такав да $\{n\} \nsubseteq A$ и $A \cup \{n\} \in K$. Како је K ауто-дуалан у амбијенту $[n]$, по Теореми 2.3 симплекс $[n] \setminus (A \cup \{n\}) = [n-1] \setminus A$ не припада комплексу K. Отуда, $[n-1] \setminus A \in 2^{[n-1]} \setminus K$ а по једначини (3.1) добијамо да је $A \in \mathbf{C}^{n-1}(2^{[n-1]} \setminus K) = \surd K$. Дакле, $\mathrm{Lk}(\{n\}) \subseteq \surd K$. □

Сада наводимо нови опис оператора надградње Λ.

Тврђење 3.8. *Ако је K произвољан под-дуалан симплицијални комплекс у амбијенту $[n-1]$, тада*

$$\Lambda K = \widehat{K}^{[n-1]} \cup \mathrm{C}K$$

где је конус $\mathrm{C}K$ добијен спајањем комплекса K и комплекса $\Delta_{\{n\}}$.

Доказ: Нека је K произвољан под-дуалан комплекс у амбијенту $[n-1]$. По Дефиницији 3.2, симплицијални комплекс ΛK је облика:

$$\left(2^{[n-1]} \setminus \mathbf{C}^{n-1}(K)\right) \cup \mathbf{C}^{n}\left(\mathbf{C}^{n-1}(K)\right).$$

На основу Леме 3.1 (својство **(6)**), први део уније $2^{[n-1]} \setminus \mathbf{C}^{n-1}(K)$ је управо $\widehat{K}^{[n-1]}$, Александеров дуал комплекса K у амбијенту $[n-1]$. Други део уније, $\mathbf{C}^{n}(\mathbf{C}^{n-1}(K))$ је на основу Леме 3.3 заправо фамилија $\{A \cup \{n\} \mid A \in K\}$. На крају, како је K под-дуалан у амбијенту $[n-1]$ односно $K \subset \widehat{K}^{[n-1]}$, ауто-дуалан комплекс ΛK можемо да представимо са:

$$\begin{aligned}\Lambda K &= \widehat{K}^{[n-1]} \cup \{A \cup \{n\} \mid A \in K\} \cup K \\ &= \widehat{K}^{[n-1]} \cup \{A \cup \{n\} \mid A \in K\} \cup \{A \cup \emptyset \mid A \in K\} \\ &= \widehat{K}^{[n-1]} \cup K * \{\emptyset, \{n\}\} = \widehat{K}^{[n-1]} \cup K * \Delta_{\{n\}}.\end{aligned}$$

□

Дакле, и оператор Λ има једноставну форму. Приметимо да, како је $K \subseteq \widehat{K}$, дуална надградња комплекса K односно симплицијални комплекс $\widehat{K}^{[n-1]} \cup CK$ има геометријску реализацију која је хомотопски еквивалентна фактор простору $||\widehat{K}||/||K||$.

3.4 Комбинаторна структура ауто-дуалних комплекса

У овом одељку дајемо генералније верзије фундаменталних релација 3.7 и 3.8 које су погодније за практичну примену.

Потсетимо се да по Дефиницији 1.4, амбијенти изоморфних симплицијалних комплекса морају да буду исте кардиналности. Ради погодније анализе, претпоставља се да су амбијенти минимални.

Нека је K произвољан симплицијални комплекс у амбијенту V где је $|V| = n$. Тада, за произвољан врх $\{v\} \in V$ постоји бијекција $\pi : V \to [n]$ која v пресликава у n. Отуда, $\pi(K) = \{\pi(A) \mid A \in K\}$ је симплицијални комплекс у амбијенту $[n]$ који је изоморфан комплексу K. Тада, комплекс K је под-дуалан (ауто-дуалан) у амбијенту V, акко је комплекс $\pi(K)$ под-дуалан (ауто-дуалан) у амбијенту $[n]$. Ова опсервација нам омогућава да све резултате Поглавља 3.2 и 3.3 који важе за комплекс $\pi(K) \subseteq 2^{[n]}$ пренесемо на комплекс $K \subseteq 2^{V}$. Такође, произвољан врх $\{v\} \subseteq V$ може да одигра улогу истакнутог врха n.

Последица 3.2. *Нека је K ауто-дуалан комплекс у амбијенту V. Тада, за произвољно $\{v\} \subset V$, симплицијални комплекс $\mathrm{Lk}(\{v\})$ је под-дуалан у амбијенту $V \setminus \{v\}$.*

Дакле, корени комплекс ауто-дуалног симплицијалног комплекса може да буде линк било којег његовог темена.

Последица 3.3. *Ако је K йод-дуалан комйлекс у амбијенйу V, йада $\widehat{K}^V \cup \mathrm{C}K$ је ауйо-дуалан симйлицијални комйлекс у амбијенйу $V \cup \{v\}$, йри йом је $\mathrm{C}K = K * \Delta_{\{v\}}$ за йроизвољно $v \notin V$. Сйецијално, ако је K ауйо-дуалан у амбијенйу V и $v \notin V$, йада симйлицијални комйлекс $\mathrm{C}K = K * \Delta_{\{v\}}$ је ауйо-дуалан у амбијенйу $V \cup \{v\}$.*

Доказ: Ако је $K \subseteq 2^V$ ауто-дуалан тада је његова дуалана надградња симплицијални комплекс:

$$\widehat{K}^V \cup K * \Delta_{\{v\}} = K \cup K * \Delta_{\{v\}} = K * \Delta_{\{v\}}.$$

□

Сада наводимо теорему која нам даје нови увид у у комбинаторну структуру ауто-дуалних симплицијалних комплекса.

Теорема 3.2. *Ако је симйлицијални комйлекс K у амбијенйу V ауйо-дуалан, йада, за свако $\{v\} \subset V$ важи:*

$$K = \widehat{\mathrm{Lk}(\{v\})}^{V \setminus \{v\}} \cup \mathrm{CLk}(\{v\})$$

ђде је $\mathrm{CLk}(\{v\}) = \mathrm{Lk}(\{v\}) * \Delta_{\{v\}}$.

Доказ: Нека је $K \subseteq V$ ауто-дуалан и нека је $|V| = n$. Тада, за произвољно $v \in V$ постоји бијекција $\pi : V \to [n]$ таква да је $\pi(v) = n$. Како су по Тврђењу 3.6 оператори $\surd$ и Λ један другом инверзни а комплекс $\pi(K)$ ауто-дуалан у амбијенту $[n]$, добијамо да је $\pi(K) = \Lambda \circ \surd\big(\pi(K)\big)$. Користећи Тврђења 3.8 и 3.7 закључујемо да је

$$\pi(K) = \widehat{\mathrm{Lk}(\{n\})}^{[n-1]} \cup \big(\mathrm{Lk}(\{n\}) * \Delta_{\{n\}}\big).$$

Ако на претходну једнакост применимо симплицијално пресликавање π^{-1} добијамо да је $K = \widehat{\mathrm{Lk}(\{v\})}^{V \setminus \{v\}} \cup \mathrm{CLk}(\{v\})$. □

Следећи пример је добра илустрација Теореме 3.2.

Пример 3.2. Као што смо се уверили у Примеру 2.2, комплекс $\binom{[2k+1]}{k}$ је ауто-дуалан у амбијенту $[2k+1]$. Ако помоћу Леме 3.4 потражимо линк темена $\{2k+1\}$ у комплексу $\binom{[2k+1]}{k}$ добијамо:

$$\mathrm{Lk}(\{2k+1\}) = \left\{ A \subset [2k] \mid A \cup \{2k+1\} \in \binom{[2k+1]}{k} \right\}$$

$$= \{A \subset [2k] \mid |A \cup \{2k+1\}| \leq k\} = \binom{[2k]}{k-1}.$$

По Примеру 2.1, знамо да је $\widehat{\binom{[2k]}{k-1}}^{[2k]} = \binom{[2k]}{2k-(k+1)-1} = \binom{[2k]}{k}$. Спајањем симплицијалног комплекса $\binom{[2k]}{k-1}$ са комплексом $\Delta_{\{2k+1\}} = \{\emptyset, \{2k+1\}\}$ добијамо фамилију која садржи све потскупове скупа $[2k+1]$ кардиналности највише k и којима елемент $2k+1$ припада. Тако добијамо да је:

$$\mathrm{Lk}(\widehat{\{2k+1\}})^{[2k]} \cup \mathrm{CLk}(\{2k+1\})$$

$$= \binom{[2k]}{k} \cup \left\{A \in \binom{[2k]+1}{k} \mid 2k+1 \in A\right\} = \binom{[2k+1]}{k}.$$

3.5 Комбинаторна класификација ауто-дуалних комплекса

Анализом Теореме 3.2 можемо да закључимо да је сваки ауто-дуални симплицијални комплекс у амбијенту V потпуно одређен линком било којег темена $v \in V$. У овом поглављу, линк темена $\{v\}$ у комплексу K означавамо са $\mathrm{Lk}_K(\{v\})$.

Фамилије $\mathcal{SD}^{[n-1]}$ и $\mathcal{D}^{[n]}$ можемо да посматрамо као категорије у којима су морфизми комбинаторне еквиваленције односно изоморфизми симплицијалних комплекса.

Нека су $K, L \subseteq 2^{[n]}$ произвољни комплекси фамилије $\mathcal{D}^{[n]}$ и $\pi : K \to L$ изоморфизам. Тада можемо да дефинишемо симплицијално пресликавање $\sqrt{\pi} : \sqrt{K} \to L$ као просту рестрикцију пресликавања π на поткомплекс $\sqrt{K} = \mathrm{Lk}_K(n)$. Међутим, слика пресликавања $\sqrt{\pi}$ не мора да буде $\sqrt{L}$ односно линк темена $\{n\}$ у комплексу L. Отуда, да би дефинисали функтор $\sqrt{}$, морамо да се ограничимо на пресликавања којима је теме n фиксна тачка али ово није добро за практичне примене. На пример, линкови темена n у комплексима $\Delta_{[n-1]}$ и $\Delta_{[n]\setminus\{1\}}$ су редом $\{\emptyset\}$ и $\Delta_{[n]\setminus\{1,n\}}$ који нису изоморфни симплицијални комплекси.

Отуда, оператор $\sqrt{}$ не може да послужи као добар функтор. За сада можемо да тврдимо да ако је $\pi : K \to L$ изоморфизам, и $v \in [n]$ произвољно, тада је рестрикција пресликавања $\pi_v : [n] \setminus \{v\} \to [n] \setminus \{\pi(v)\}$ изоморфизам симплицијалних комплекса $\mathrm{Lk}_K(\{v\})$ и $\mathrm{Lk}_L(\{\pi(v)\})$.

Приметимо да оператор корена има сличан проблем као и класичан корен на скупу комплексних бројева који се категорише као „вишезначна функција”.

Нека су сада K и L под-дуални симплицијални комплекси у амбијенту $[n-1]$ и нека је $\pi : [n-1] \to [n-1]$ изоморфизам комплекса K и L. Дефинишемо пресликавање $\Lambda\pi : [n] \to [n]$ са:

$$\Lambda\pi = \begin{cases} \pi(v), & v \in [n-1], \\ n, & v = n. \end{cases}$$

Покажимо да је $\Lambda\pi$ изоморфизам комплекса $\Lambda K = \widehat{K}^{[n-1]} \cup K * \Delta_{\{n\}}$ и $\Lambda L = \widehat{L}^{[n-1]} \cup L * \Delta_{\{n\}}$. Прво, на основу Леме 2.2, пресликавање π је изоморфизам комплекса $\widehat{K}^{[n-1]}$ и $\widehat{L}^{[n-1]}$. Отуда, да би доказали да је $\Lambda\pi$ изоморфизам комплекса ΛK и ΛL, довољно је да покажемо да је $\Lambda\pi$ изоморфизам комплекса $K * \Delta_{\{n\}}$ и $L * \Delta_{\{n\}}$. Нека је $A \subseteq [n]$ произвољан. Ако $n \notin A$, симплекс A припада K акко $\Lambda\pi(A) = \pi(A)$ припада комплексу L (јер $\pi : K \to L$ је изоморфизам) што доказује да $A \in K * \Delta_{\{n\}}$ акко $\Lambda\pi(A) \in K * \Delta_{\{n\}}$. Ако $n \in A$, симплекс A припада комплексу $K * \Delta_{\{n\}}$ акко $A = B \cup \{n\}$ за неки $B \in K$. Како је $\pi : K \to L$ изоморфизам, претходно је еквивалентно услову да $\pi(B)$ припада комплексу L односно да $\pi(B) \cup \{n\}$ припада комплексу $L * \Delta_{\{n\}}$. Отуда, $A = B \cup \{n\}$ припада $K * \Delta_{\{n\}}$ акко $\pi(B) \cup \{n\} = \Lambda\pi(B \cup \{n\}) = \Lambda\pi(A)$ припада комплексу $L * \Delta_{\{n\}}$.

Овим смо доказали да дијаграм:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\pi} & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda K & \xrightarrow{\Lambda\pi} & \Lambda L \end{array}$$

комутира и да је $\Lambda\pi$ изоморфизам.

Дакле, пресликавање Λ можемо да посматрамо и као коваријантан функтор из категорије под-дуалних симплицијалних комплекса у амбијенту $[n-1]$ са изоморфизмима у категорију ауто-дуалних симплицијалних комплекса у амбијенту $[n]$ са изоморфизмима. Овим смо доказали главну теорему овог поглавља:

Теорема 3.3. *Ауто-дуални симплицијални комплекси $K \subseteq 2^V$ и $L \subseteq 2^W$, где је $|V| = |W|$, су комбинаторно еквивалентни акко постоје врхови $\{v\} \in K$ и $\{w\} \in L$ такви да су $\mathrm{Lk}_K(\{v\})$ и $\mathrm{Lk}_L(\{w\})$ комбинаторно еквивалентни.*

Претходна теорема значајно поједностављује комбинаторну класификацију ауто-дуалних симплицијалних комплекса. Стандардна провера комбинаторне еквивалентности подразумева проналажење бијекције амбијентних скупова која задовољава Дефницију 1.4. Ако је кардиналност амбијента

n, постоји $n!$ потенцијалних бијекција. Како линк темена $\{v\}$ не садржи $\{v\}$, Теорема 3.3 смањује број потенцијалних бијекција на $(n-1)!$. Наравно, најпрактичније је наћи врх датог ауто-дуалног комплекса чији линк има најмањи број темена и упоредити га са линком врха другог комплекса са истим бројем темена.

Теорема 3.3 нам такође омогућава да ефикасно одредимо све неизоморфне ауто-дуалне комплексе у амбијенту $[n]$. По теореми, довољно је да одредимо неизоморфне под-дуалне комплексе у амбијенту $[n-1]$ а неизоморфни ауто-дуални комплекси ће да буду међу њиховим дуалним надградњама. При том, Теорема 3.3 не гарантује да се дуалним надградњама неизоморфних под-дуалних комплекса добијају неизоморфни ауто-дуални комплекси. На пример, по Тврђењу 2.1, комплекси $\binom{[3]}{0} = \{\emptyset\}$ и $\binom{[2]}{1}$ су поддуални у амбијенту [3] и нису изоморфни. Међутим, њихове дуалне надградње

$$\Lambda\binom{[3]}{0} = \widehat{\binom{[3]}{0}}^{[3]} \cup \binom{[3]}{0} * \Delta_{\{4\}} = \binom{[3]}{2} \cup \big\{\{4\}\big\},$$

$$\Lambda\binom{[2]}{1} = \widehat{\binom{[2]}{1}}^{[3]} \cup \binom{[2]}{1} * \Delta_{\{4\}}$$

$$= \widehat{\binom{[3]}{1} \setminus \big\{\{3\}\big\}}^{[3]} \cup \binom{[2]}{1} * \Delta_{\{4\}} = \left(\widehat{\binom{[3]}{1}}^{[3]} \cup \big\{\{1,2\}\big\}\right) \cup \binom{[2]}{1} * \Delta_{\{4\}}$$

$$= \binom{[3]}{1} \cup \big\{\{1,2\},\{4\},\{1,4\},\{2,4\}\big\} = \binom{\{1,2,4\}}{2} \cup \big\{\{3\}\big\}$$

су изоморфни симплицијални комплекси. Отуда, комбинаторном филтрацијом неизоморфних под-дуалних комплекса вршимо само делимичну комбинаторну филтрацију њихових дуалних надградњи.

Пример 3.3. У Примеру 3.1 је показано да су једини аутодуални комплекси у амбијенту [3] комплекси $\Delta_{\{1,2,3\}\setminus\{i\}}$, $i = 1,2,3$ и комплекс $\binom{[3]}{1}$. Отуда, под-дуални комплекси у амбијенту [3] су поткомплекси комплекса фамилије $\mathcal{D}^{[3]}$ и то Δ_A где $A \in \binom{[3]}{2}$ заједно са комплексима $\binom{[3]\setminus\{i\}}{1}$ где $i = 1,2,3$. Међу њима, неизоморфни су:

$$K_0 = \{\emptyset\}, K_1 = \Delta_{\{1\}}, K_2 = \binom{[2]}{1}, K_3 = \binom{[3]}{1}, K_4 = \Delta_{\{1,2\}}.$$

Као што смо већ видели, дуалне надградње комплекса K_0 и K_2 су изоморфне комплексу $\binom{[3]}{2} \cup \big\{\{4\}\big\}$. Даље, дуална надградња комплекса K_1 је симплицијални комлекс:

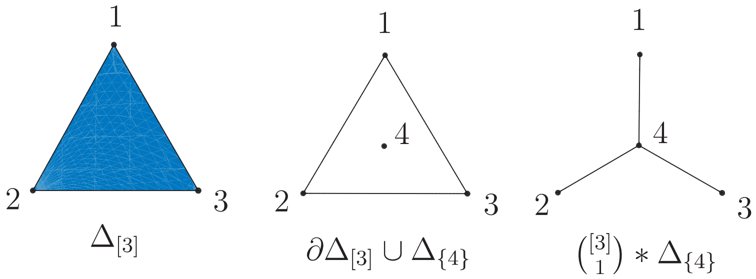
$$\Lambda\Delta_{\{1\}} = \widehat{\Delta_{\{1\}}}^{[3]} \cup \Delta_{\{1\}} * \Delta_{\{4\}} = \widehat{\binom{3}{0} \cup \{1\}}^{[3]} \cup \Delta_{\{1,4\}}$$

$$= \left(\widehat{\binom{3}{0}}^{[3]} \setminus \big\{\{2,3\}\big\}\right) \cup \Delta_{\{1,4\}} = \left(\binom{3}{2} \setminus \big\{\{2,3\}\big\}\right) \cup \Delta_{\{1,4\}}$$

$$= \Delta_{\{1,2\}} \cup \Delta_{\{1,3\}} \cup \Delta_{\{1,4\}} = \binom{\{2,3,4\}}{1} * \Delta_{\{1\}}.$$

Комплекси K_3 и K_4 су ауто-дуални у амбијенту $[3]$. По Последици 3.3 њихове дуалне надградње су редом симплицијални комплекси $\Lambda\binom{[3]}{1} = \binom{[3]}{1} * \Delta_{\{4\}}$ и $\Lambda\Delta_{\{1,2\}} = \Delta_{\{1,2\}} * \Delta_{\{4\}} = \Delta_{\{1,2,4\}}$.

Како су, ΛK_1 и ΛK_3 изоморфни симплицијални комплекси, закључујемо да у амбијенту $[4]$ постоје три неизоморфна ауто-дуална симплицијална комплекса који су приказани на Фигури 14.



Фигура 14: Неизоморфни ауто-дуални комплекси у амбијенту $[4]$.

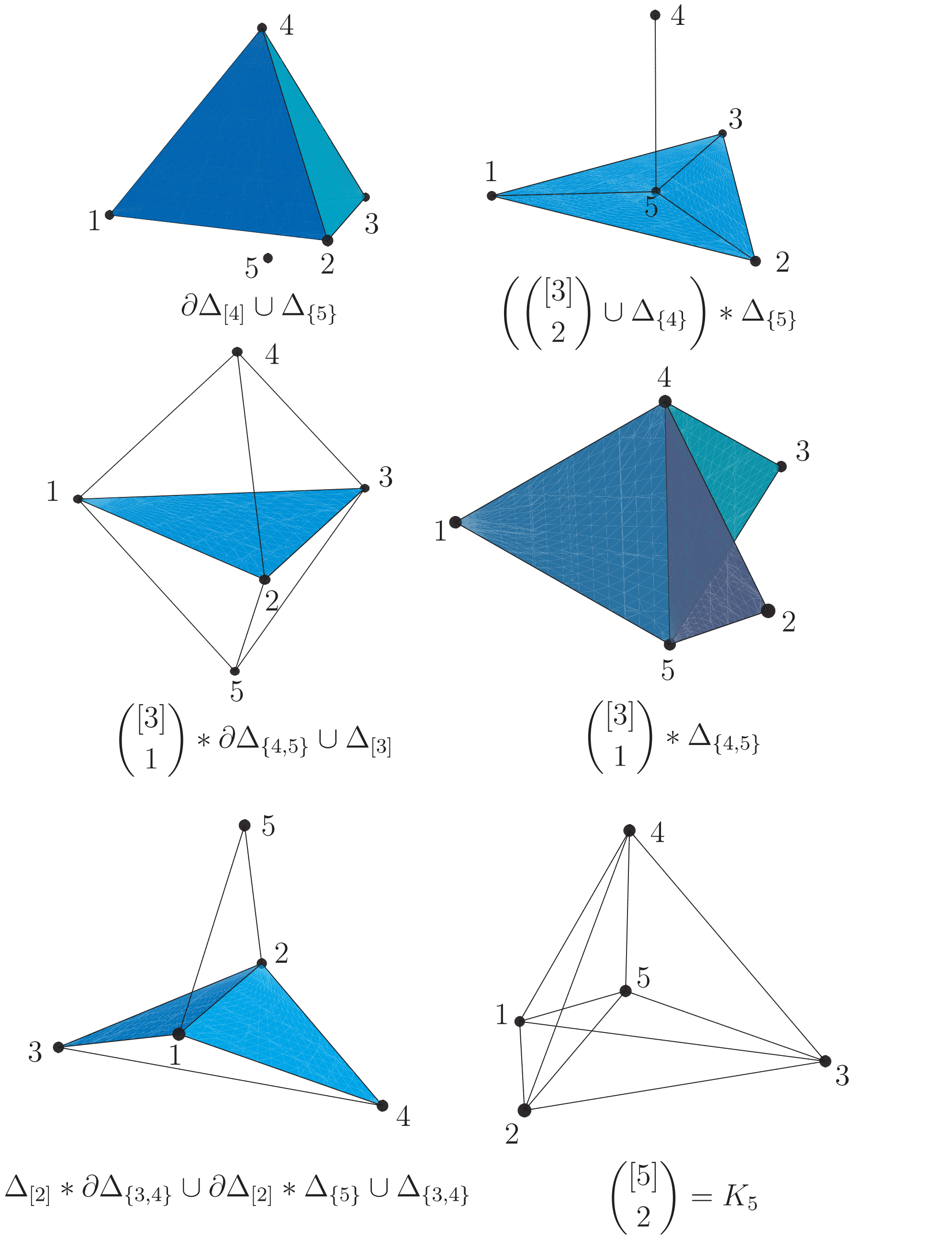
Пример 3.4. Не изоморфни под-дуални симплицијални комплекси у амбијенту $[4]$ су поткомплекси комплекса $\binom{[3]}{2} \cup \big\{\{4\}\big\}$, $\binom{[3]}{1} * \Delta_{\{4\}}$ и $\Delta_{[3]}$ и то су:

$$K_0 = \{\emptyset\}, K_1 = \Delta_{\{1\}}, K_2 = \binom{[2]}{1}, K_3 = \binom{[3]}{1}, K_4 = \binom{[4]}{1}, K_5 = \Delta_{[2]},$$

$$K_6 = \binom{[2]}{1} * \Delta_{\{3\}}, K_7 = \binom{[3]}{2}, K_8 = K_5 \cup \big\{\{3\}\big\}, K_9 = K_5 \cup \big\{\{3\},\{4\}\big\},$$

$$K_{10} = K_6 \cup \big\{\{4\}\big\}, K_{11} = K_7 \cup \big\{\{4\}\big\}, K_{12} = K_3 * \{4\}, K_{13} = \Delta_{[3]}.$$

Аналогно претходном примеру, коришћењем Леме 3.2 можемо да израчунамо њихове дуалне надградње. Тако добијамо аутодуалне комплексе:



Фигура 15: Неизоморфни ауто-дуални комплекси у амбијенту [5].

$$\Lambda K_0 \approx \Lambda K_7 \approx \binom{[4]}{3} \cup \{\{5\}\}, \Lambda K_1 \approx \Lambda K_6 \approx \Lambda K_{11} \approx \left(\binom{[3]}{2} \cup \{\{4\}\}\right) * \Delta_{\{5\}},$$

$$\Lambda K_2 \approx \Lambda K_8 \approx \Lambda K_{10} \approx \Delta_{[2]} * \binom{\{3,4\}}{1} \cup \binom{[2]}{1} * \Delta_{\{5\}} \cup \big\{\{3,4\}\big\},$$

$$\Lambda K_3 \approx \Lambda K_9 \approx \binom{[3]}{1} * \binom{\{4,5\}}{1} \cup \Delta_{[3]}, \Lambda K_4 = \binom{[5]}{2}$$

$$\Lambda K_5 \approx \Lambda K_{12} = \binom{[3]}{1} * \Delta_{\{4,5\}}, \Lambda K_{13} = \Delta_{[4]}.$$

Дакле, у амбијенту [5] постоји 7 неизоморфних аутодуалних симплицијалних комплекса приказаних на Фигури 15.

3.6 $f-$вектори дуалних надградњи

Сваком симплицијалном комплексу K у амбијенту $[n]$ можемо да доделимо вектор $f(K) \in \mathbb{N}^n$ који називамо $f-$вектор (енг. face vector). Овај вектор броји симплексе комплекса K исте димензије односно:

$$f(K) = (f_0, f_1, \dots, f_n), f_i = |\{A \in K \mid \dim A = i-1\}|, i = 0, 1, \dots, n. \tag{3.2}$$

Сви симплицијални комплекси осим комплекса $K = \emptyset$ садрже празан симплекс те је код њих $f_0 = 1$. Координата f_1 представља број врхова, координата f_2 представља број једнодимензионалних симплекса итд. Тада, Ојлерова карактеристика комплекса K се рачуна помоћу формуле:

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_i. \tag{3.3}$$

Неколико једноставних особина $f-$вектора и Ојлерове карактеристике су дате у следећој леми.

Лема 3.5. *За произвољне симплицијалне комплексе K и L у амбијенту $[n]$ важи да је $f(K \cup L) = f(K) + f(L) - f(K \cap L)$, што имплицира да је Ојлерова карактеристика $\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L)$.*

Ако је K симплицијални комплекс и $L \subseteq K$ произвољна фамилија скупова тада је $f(K \setminus L) = f(K) - f(L)$.

Нека је $K \subseteq 2^{[n]}$ симплицијални комплекс са и нека је $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ његов $f-$вектор. Присетимо се да је на основу Леме 3.1, Александеров дуал симплицијалног комплекса K у амбијенту $[n]$ једнак $2^{[n]} \setminus \mathrm{C}^n(K)$. Отуда, ако потражимо $f-$вектор комплекса $\widehat{K}$ добијамо:

$$f(\widehat{K}) = f\big(2^{[n]} \setminus \mathrm{C}^n(K)\big) = f\big(2^{[n]}\big) - f\big(\mathrm{C}^n(K)\big).$$

По Дефиницији (3.1) знамо да је $\mathrm{C}^n(K) = \{[n] \setminus A \mid A \in K\}$ па, $i-$та координата вектора $f\big(\mathrm{C}^n(K)\big)$ (коју означавамо са $f\big(\mathrm{C}^n(K)\big)_i$) је једнака броју симплекса фамилије $\mathrm{C}^n(K)$ кардиналности i а то је управо f_{n-i}. Тако добијамо део (1) следећег тврђења.

Тврђење 3.9. *За произвољан симплицијални комплекс $K \subseteq 2^{[n]}$ са $f-$вектором $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ важи да је:*

(1) $f(\widehat{K})_i = \binom{n}{i} - f_{n-i}$ *за све* $i = 0, 1, \ldots, n$.

(2) $\chi(\widehat{K}) = (-1)^{n+1}\big(\chi(K) - f_0\big) - f_n + 1$.

(3) *Ако је* $\emptyset \neq K \subset 2^{[n]}$, *тада је* $\chi(\widehat{K}) = \begin{cases} \chi(K), & n \equiv 1 \mod 2, \\ -\chi(K) + 2, & n \equiv 0 \mod 2. \end{cases}$

Доказ: За тврђење **(2)**, ако искористимо тврђење **(1)**, добијамо низ једнакости:

$$\chi(\widehat{K}) = \sum_{i=1}^{n} f(\widehat{K}_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\left(\binom{n}{i} - f_{n-i}\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f_{n-i} = 1 - \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{-i} f_{n-i}$$

$$= 1 - (-1+1)^n + (-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i+1} f_{n-i} = 1 + (-1)^{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1} f_i$$

$$= 1 + (-1)^{n+2} f_0 + (-1)^{n+1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1} f_i - (-1)^{2n+2} f_n$$

$$= (-1)^{n+1}\big(\chi(K) - f_0\big) - f_n + 1$$

Тврђење **(3)** следи из тврђења **(2)** јер $f-$вектор симплицијалног комплекса $\emptyset \neq K \subset 2^{[n]}$ је такав да је $f_0 = 1$ и $f_n = 0$. □

Последица 3.4. *Ојлерова карактеристика ауто-дуалних комплекса у амбијенту парне кардиналности је* 1.

У наставку ћемо да анализирамо $f-$векторе дуалних надградњи.

Тврђење 3.10. *За произвољан под-дуалан комплекс $K \subseteq 2^{[n-1]}$ важи:*

(1) $f(\Lambda K)_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \binom{n-1}{i} - f_{n-1-i} + f_{i-1}, & i = 1, \ldots, n-1, \\ 0, & i = n. \end{cases}$

(2) $\chi(\Lambda K) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \mod 2, \\ -2\chi(K) + 3, & n \equiv 1 \mod 2. \end{cases}$

где је $f(K) = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$.

Доказ: Нека је $\emptyset \neq K \subseteq 2^{[n-1]}$ под-дуалан симплицијални комплекс и нека је $f(K) = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$. Спајање комплекса K и комплекса $\Delta_{\{n\}}$, на основу Дефиниције 1.6 има $f_i + f_{i-1}$ симплекса кардиналности i за све $i = 0, \dots, n$.

Како је $\Lambda(K) = \widehat{K}^{[n-1]} \cup K * \Delta_{\{n\}}$ и $\widehat{K}^{[n-1]} \cap K * \Delta_{\{n\}} = K$, на основу Тврђења 3.9 део **(1)** добијамо да је за све $i = 0, 1, \dots, n-1$:

$$f(\Lambda K)_i = f(\widehat{K}^{[n-1]})_i + f(K * \Delta_{\{n\}})_i - f(K)_i$$

$$= \binom{n-1}{i} - f_{n-1-i} + f_i + f_{i-1} - f_i = \binom{n-1}{i} - f_{n-1-i} + f_{i-1}.$$

Како је комплекс ΛK ауто-дуалан у амбијенту $[n]$, он не може да садржи симплекс $[n]$ јер би у супротном $\Lambda K = \Delta_{[n]}$ а на основу Примера 2.3 знамо да $\Delta_{[n]}$ није ауто-дуалан у амбијенту $[n]$. Тако закључујемо да је $f(\Lambda K)_n = 0$. Такође, $f(\Lambda K)_0 = 1$ јер по Примеру 2.4 не постоје ауто-дуални комплекси без врхова.

Користећи Лему 3.5, Ојлерова карактеристика комплекса ΛK једнака је суми $\chi(\widehat{K}^{[n-1]}) + \chi(K * \Delta_{\{n\}}) - \chi(K)$. Како је $f_n = 0$ и $f_0 = 1$, на основу Тврђења 3.9 знамо да је $\chi(\widehat{K}^{[n-1]}) = (-1)^n\big(\chi(K) - 1\big) + 1$. Што се тиче комплекса $K * \Delta_{[n]}$, његова Ојлерова карактеристика је 1 јер је у питању триангулација контрактибилног простора. Тако добијамо да је:

$$\chi(\Lambda K) = (-1)^n\big(\chi(K) - 1\big) + 2 - \chi(K).$$

$\square$

Претходно тврђење нам олакшава налажење Ојлерове карактеристике ауто-дуалних комплекса у непарним амбијентима. Како је сваки ауто-дуални комплекс дуална надградња линка својег произвољног темена, ако знамо Ојлерову карактеристику линка, лако можемо да израчунамо Ојлерову карактеристику полазног комплекса. Такође, ако знамо Ојлерову карактеристику ауто-дуалног комплекса $K \subseteq 2^{[2k+1]}$, по претходном тврђењу знаћемо и Ојлерову карактеристику линка прозвољног његовог темена.

Последица 3.5. *За произвољан ауто-дуалан комплекс* $K \subseteq 2^{[2k+1]}$ *и произвољно* $v \in [n]$ *важи:* $\chi\big(\mathrm{Lk}(\{v\})\big) = \frac{1}{2}(3 - \chi(K))$.

Сада ћемо да се осврнемо на технике описане у Поглављу 3.1. Присетимо се да произвољни ауто-дуални комплекси $K, L \subseteq 2^{[n]}$ могу да се повежу у графу суседсва $\mathcal{NG}_n$ путем дужине $|K \setminus L|$. Ову опсервацију ћемо да искористимо ради рачунања Ојлерове карактеристике ауто-дуалних комплекса амбијентима непарне кардиналности.

Нека је $K \subset 2^{[2k+1]}$ ауто-дуалан комплекс са $f-$вектором $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ и нека је $A \in K$ главни симплекс кардиналности i. Реконструкција комплекса K престројавањем главног симплекса A је ауто-дуалан комплекс $rs_A(K) = (K \setminus \{A\}) \cup \{[2k+1] \setminus A\}$ са $f-$вектором:

$$f(rs_A(K))_j = \begin{cases} f_j, & j \in [n] \setminus \{i, 2k+1-i\}, \\ f_i - 1, & j = i, \\ f_i + 1, & i = 2k+1-i. \end{cases}$$

Ако потражимо Ојлерову карактеристику комплекса $rs_A(K)$ добијамо:

$$\chi\big(rs_A(K)\big) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} f(rs_A(K))_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} f_j - (-1)^{i+1} + (-1)^{2k+1-i+1}$$

$$= \chi(K) + (-1)^{i+1}(-1 + (-1)^{2k+1}) = \chi(K) + (-2)^{i+1}$$

Дакле, разлика Ојлерових карактеристика суседних чворова у графу суседства $\mathcal{NG}_{2k+1}$ је ± 2. Како свака два чвора графа $\mathcal{NG}_{2k+1}$ могу да се повежу путем (Тврђење 3.2), а Ојлерова карактеристика ауто-дуалног комплекса $\Delta_{[2k+1]}$ једнака 1, закључујемо да сви ауто-дуални комплекси у амбијенту $[2k+1]$ имају Ојлерову карактеристику облика $1 \pm 2i$ за неко $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Да би се утврдио тачан опсег Ојлерових карактеристика ауто-дуалних комплекса у амбијенту $[2k+1]$, довољно је да се одреде под-дуални комплекси у амбијенту $[2k]$ са највећом и најмањом Ојлеровом карактеристиком. Тада ће на основу Тврђења 3.10 њихове дуалне надградње да представљају ауто-дуалне комплексе са максималном и минималном Ојлеровом карактеристиком а остале могућности за Ојлерове карактеристике су сви непарни бројеви који се налазе у добијеном интервалу. На пример, $\Delta_{[6]}$ и $\binom{[7]}{3}$ су ауто-дуални комплекси у амбијенту [7] са Ојлеровим карактеристикама 1 и 21. Отуда, у графу $\mathcal{NG}_7$, на произвољном путу који повезује комплексе $\Delta_{[6]}$ и $\binom{[7]}{3}$ морају да се нађу и ауто-дуални комплекси са Ојлеровим карактеристикама $1 + 2i$ где $i = 0, 1, \ldots, 10$.

3.7 Хомологија и кохомологија дуалних надградњи

У овом одељку анализирамо везу између хомологије и кохомологије датог симплицијалног комплекса и његове ауто-дуалне надградње описане у Поглављу 3.3.

Нека је K симплицијални комплекс у амбијенту V. По Тврђењу 2.2, можемо да претпоставимо да је K под-дуалан јер под-дуалност може да се постигне простим увећањем амбијента V. Посматрајмо дуалну надградњу комплекса K односно комплекс

$$\Lambda K = \widehat{K} \cup \mathrm{C}K.$$

На основу Тврђења 3.5, знамо да је дуална надградња симплицијалног комплекса ауто-дуалан комплекс у амбијенту $V \cup \{v\}$. Отуда, као последицу Теореме 2.2 добијамо следеће тврђење.

Последица 3.6. *Нека је K йод-дуалан симӣлицијални комӣлекс у амбијенѿу V ӡде је $|V| = n$. Тада за њеӡову дуалну надӡрадњу ΛK и све $i = 1, \ldots, n+1$ важи:*

$$\widetilde{H}_i\big(\Lambda(K)\big) \approx \widetilde{H}^{n-i-2}(\Lambda(K)\big).$$

Анализирајмо сада пар симплицијалних комплекса $(\Lambda(K), \widehat{K})$. Циљ нам је да опишемо хомологију комплекса ΛK помоћу хомологије комплекса K. Користећи дуги тачан низ хомолошких група добијамо:

$$\cdots \to \widetilde{H}_k\big(\widehat{K}\big) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_k\big(\Lambda K\big) \xrightarrow{q_*} \widetilde{H}_k\big(\Lambda K, \widehat{K}\big) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{k-1}\big(\widehat{K}\big) \to \cdots \tag{3.4}$$

Како симплицијални комплекс и његов поткомплекс чине добар пар, знамо да су групе $\widetilde{H}_k\big(\Lambda K, \widehat{K}\big)$ изоморфне групама $H_k\big(\Lambda K/\widehat{K}\big)$ где је фактор простор $\Lambda K/\widehat{K}$ заправо $\big(\widehat{K} \cup \mathrm{C}K\big)/\widehat{K}$. Присетимо се да по Тврђењу 3.8 важи $\widehat{K} \cap \mathrm{C}K = K$. Отуда, фактор простор $\Lambda K/\widehat{K}$ је хомеоморфан простору $\mathrm{C}K/K$ који је хомотопски еквивалентан суспензији $\mathrm{S}K$ симплицијалног комплекса K. Познато је да су групе $\widetilde{H}_k(\mathrm{S}K)$ изоморфне групама $H_{k-1}(K)$ па, ако у тачном низу (3.4) групе $\widetilde{H}_k\big(\Lambda(K), \widehat{K}\big)$ заменимо са $\widetilde{H}_{k-1}(K)$ добијамо:

$$\cdots \to \widetilde{H}_k\big(\widehat{K}\big) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_k\big(\Lambda K\big) \xrightarrow{q'_*} \widetilde{H}_{k-1}(K) \xrightarrow{\partial'} \widetilde{H}_{k-1}\big(\widehat{K}\big) \to \cdots \tag{3.5}$$

Помоћу Теореме 2.2 и Теореме о универзалним коефицијентима која повезује хомологију и кохомологију датог симплицијалног комплекса, лако можемо да одредимо хомолошке групе $H_k\big(\widehat{K}\big)$. Наиме, сваком $\mathbb{Z}$ сабирку групе $\widetilde{H}_k(K)$ одговара $\mathbb{Z}$ сабирак групе $\widetilde{H}_{n-3-i}\big(\widehat{K}\big)$ а сваком $\mathbb{Z}_p$ сабирку групе $\widetilde{H}_k(K)$ одговара $\mathbb{Z}_p$ сабирак групе $\widetilde{H}_{n-4-k}\big(\widehat{K}\big)$.

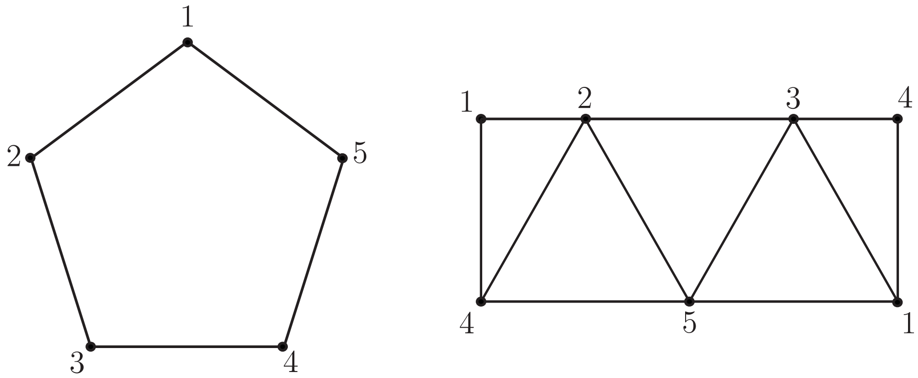
Отуда, да би помоћу тачног низа (3.5) одредили групе $H_k\big(\Lambda(K)\big)$, довољно је да опишемо хомоморфизме q'_* и ∂'. По конструкцији, ови хомоморфизми су уско повезани са стандардним хомоморфизмима q_* и ∂ из низа (3.4).

Међутим, постоји много једноставнији опис хомоморфизма q'_* и ∂'. Посматрајмо дуги тачан низ за пар $(\widehat{K}, K)$.

$$\cdots \to \widetilde{H}_k\big(\widehat{K}\big) \xrightarrow{q^o_*} \widetilde{H}_k\big(\widehat{K}, K\big) \xrightarrow{\partial^o} \widetilde{H}_{k-1}(K) \xrightarrow{i^o_*} \widetilde{H}_{k-1}\big(\widehat{K}\big) \to \cdots \tag{3.6}$$

Овде, $H_k\big(\widehat{K}, K\big)$ је изоморфно групи $H_k\big(\widehat{K}/K\big)$ а како је CK контрактибилан простор, симплицијални комплекс $\widehat{K} \cup CK$, односно управо ΛK, је хомотопски еквивалентан фактор простору $\widehat{K}/K$. Отуда, ако упоредимо низове (3.5) и (3.6), можемо да закључимо да је ∂' индуковано инклузијом $i^0 : K \to \widehat{K}$ а q'_* је индукован ивичним пресликавањем ∂^o.

Пример 3.5. Нека је K петоугао приказан на Фигури 16. Како је K једнодимензионалан, по Тврђењу 2.1 он је под-дуалан у амбијенту $[5]$ па, његова дуална надградња ће да буде ауто-дуалан симплицијални комплекс у амбијенту $[6]$. Како су минимални не-симплекси комплекса K дијагонале петоугла, главни симплекси комплекса $\widehat{K}$ ће да буду комплементи дијагонала. Отуда, $\widehat{K}$ је триангулација Мебијусове траке чија је граница петоугао K као што је приказано на Фигури 16.



Фигура 16: Петоугао и његов Александеров дуал, Мебијусова трака.

По Теореми 2.2, групе $\widetilde{H}_i(K)$ су изоморфне групама $\widetilde{H}_{5-i-3}(\widehat{K})$ а ове групе су тривијалне за $k \neq 1$ и једнаке $\mathbb{Z}$ за $k = 1$. Отуда, ако искористимо тачан низ (3.5), добијамо да је $\widetilde{H}_k\big(\Lambda(K)\big) = 0$ за све $k \neq 1$. Како се граница

Мебијусове траке два пута обмотава око централне кружнице која генерише $H_1\big(\widehat{K}\big)$, закључујемо да је хомоморфизам i_*^o заправо множење са 2. Тако добијамо да је једини нетривијални део низа (3.5) за пар $(\Lambda K, K)$:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_1\big(\Lambda(K)\big) \to 0$$

Како је хомоморфизам i_* сирјективан, група $\widetilde{H}_1\big(\Lambda(K)\big)$ је изоморфна групи $\mathrm{Im} i_*/\mathrm{Ker} i_* = \mathrm{Im} i_*/\mathrm{Im} i_*^o = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}_2$.

Дакле, ΛK је дво-димензионална комбинаторна многострукост са $\mathbb{Z}_2$ хомологијом у димензији 1 па закључујемо да ΛK представља триангулацију пројективне равни описане у Примеру 2.5.

У претходном примеру смо видели да помоћу тачног низа (3.5) некада можемо да конструишемо ауто-дуалне компексе са унапред задатим хомолошким групама. Наравно, хомолошке групе морају да имају структуру описану у Теореми 2.2.

Сада наводимо специјалан случај када хомолошке групе дуалних надградњи могу да се одреде без познавања хомоморфизама из тачног низа (3.5).

Теорема 3.4. *Нека је K симплицијални комплекс димензије $k > 1$ у амбијенту V где је $|V| \geq 2k+3$. Тада ΛK има исте хомолошке и кохомолошке групе као простор $\widehat{K} \vee \mathrm{S}K$ где је $\vee$ клинаста сума простора.*

Доказ: По Тврђењу 2.1, комплекс K је под-дуалан у амбијенту V.

Како је димензија комплекса K једнака k, све групе $H_i(K)$ су тривијалне за $i > k$. Такође, ако је $|V| = n$ и $n \geq 2k+3$ тада, користећи Теорему 2.2 и Теорему о универзалним коефицијентима, закључујемо да су једине могуће нетривијалне хомолошке групе симплицијалног комплекса $\widehat{K}$ у димензијама $n-3, n-4, \ldots, n-k-3$ (приметимо да је група $H_k(K)$ без торзије). Како је $n-k-3 \geq 2k+3-k-3 = k$, закључујемо да у дугом тачном низу (3.5) за пар $\big(\Lambda K, \widehat{K}\big)$, групе $\widetilde{H}_i\big(\widehat{K}\big)$ и $\widetilde{H}_{i-1}\big(\widehat{K}\big)$ су тривијалне или су $\widetilde{H}_i(K)$ и $\widetilde{H}_{i-1}(K)$ тривијалне. Како је низ (3.5) тачан, претходно имплицира да је $\widetilde{H}_i(\Lambda K)$ изоморфно групи $\widetilde{H}_{i-1}(K)$ или је $\widetilde{H}_i(\Lambda K)$ изоморфно групи $\widetilde{H}_i\big(\widehat{K}\big)$.

Ово комплетира доказ. $\square$

3.8 Конструкција ауто-дуалних триангулација пројективних простора

У Поглављу 2.4 су дати примери триагулација пројективних простора као примери ауто-дуалних симплицијалних комплекса. Ауто-дуалност добијених триангулација је била више последица него претпоставка за добијене симплицијалне комплексе. У овом одељку описаћемо један нови начин за добијање ауто-дуалних триангулација ових комплекса.

Симплицијалне комплексе K димензије k такве да је линк сваког њиховог темена триангулација сфере димензије $k-1$ називамо комбинаторне многострукости.

Дефиниција 3.3. *Кажемо да комбинаторна многострукост K димензије $2k$ личи на пројективну раван ако је:*

$$\widetilde{H}_i(K) = \begin{cases} 0, & i \notin \{k, 2k\}, \\ \mathbb{Z}, & i \in \{k, 2k\}. \end{cases}$$

при том је $k = 2, 4, 8$.

Као што је очигледно из претходне дефиниције, циљ је да добијемо триангулације комплексне ($k = 2$), кватернионске ($k = 4$), и октанионске пројективне равни ($k = 8$).

Нека је $K \subseteq 2^{[n]}$ ауто-дуалан симплицијални комплекс из Дефиниције 3.3. Тада, да би хомолошке групе комплекса K задовољавале Теорему 2.2, мора да важи да је $\widetilde{H}_i(K) = \widetilde{H}^{n-3-i}(K)$. Како је комплекс K без торзије, на основу Теореме о универзалним коефицијентима претходно је еквивалентно услову да је $\widetilde{H}_i(K) = \widetilde{H}_{n-3-i}(K)$ а једина могућност да претходна једнакост буде задовољена за све $i = 1, \ldots, 2k$ је за $n-3-k = 2k$ односно за $n = 3k+3$. Тако закључујемо да је амбијент комплекса K кардиналности 9 за $k = 2$, 15 за $k = 4$ и 27 за $k = 8$.

Комплекс K је ауто-дуалан симплицијални комплекс па је на основу Теореме 3.2 употпуности одређен поткомплексом $\mathrm{Lk}(\{v\})$ а пошто је K комбинаторна многострукост, $\mathrm{Lk}(\{v\})$ је триангулација сфере димензије $2k-1$ за све $v \in V$. Ако $\mathrm{Lk}(\{v\})$ означимо са S^{2k-1}, тада је

$$K = \widehat{\mathrm{S}^{2k-1}} \cup \mathrm{CS}^{2k-1}.$$

Како је по претпоставци K комбинаторна многострукост димензије $2k$, сви његови главни симплекси такође морају да буду димензије $2k$. Из услова да је $\widehat{\mathrm{S}^{2k-1}} \cap \mathrm{CS}^{2k-1} = \mathrm{S}^{2k-1}$ закључујемо да је

$$Gl(\widehat{\mathrm{S}^{2k-1}} \cup \mathrm{CS}^{2k-1}) = Gl(\widehat{\mathrm{S}^{2k-1}}) \cup Gl(\mathrm{CS}^{2k-1}). \tag{3.7}$$

Ако би постојао симплекс $A \in [3k+2]$ кардиналности k који не припада сфери S^{2k-1}, тада би симплекс $[3k+2] \setminus A$ који је кардиналности $2k+2$ припадао Александеровом дуалу $\widehat{\mathrm{S}^{2k-1}}$ што није могуће јер сви симплекси комплекса $\widehat{\mathrm{S}^{2k-1}}$ су кардиналности највише $2k+1$. Тако закључујемо да S^{2k-1} садржи све симплексе фамилије $\binom{[3k+2]}{k}$.

Ако је $(f_0, f_1, \dots, f_{2k+3})$ $f-$вектор комплекса S^{2k-1}, на основу Тврђења 3.9, закључујемо да комплекс $\widehat{\mathrm{S}^{2k-1}}$ има $\binom{[3k+2]}{2k+1} - f_{k+1}$ главних симплекса. Главни симплекси конуса CS^{2k-1} су облика $A \cup \{3k+2\}$ где $A \in Gl(S^{2k-1})$ и има их f_{2k}. Како ни један симплес комплекса $\widehat{\mathrm{S}^{2k-1}}$ не садржи теме $3k+3$, закључујемо да комплекс K има $\binom{[3k+2]}{2k+1} - f_{k+1} + f_{2k}$ главних симплекса.

Дакле, да би конструисали ауто-дуалну комбинаторну многострукост која личи на пројективну раван, потребно је да конструишемо дуалну надградњу сфере S^{2k-1} која има следећа својства:

- S^{2k-1} је под-дуална у амбијенту $[3k+2]$,
- $\binom{[3k+2]}{k} \subset \mathrm{S}^{2k-1} \subset \binom{[3k+2]}{2k+1}$,
- S^{2k-1} је комбинаторна многострукост.

Комплекси описани у Поглављу 2.4 као линкове темена имају сфере са наведеним својствима. Да би добили триангулацију многострукости која личи на октанионску пројективну раван, можемо да конструишемо дуалну надградњу сфере S^{15} у амбијенту [26]. Тачан низ (3.5) гарантује да добијени симплицијални комплекс има исту хомологију као октанионска пројективна раван. Међутим, да би потврдили да је у питању октанионска пројективна раван, потребно је да докажемо да добијени комплекс има и одговарајући кохомолошки прстен.

Конструкција комбинаторне октанионске равни ће да буде предмет будућих истраживања.

4 Неизбежни симплицијални комплекси

Неизбежни симплицијални комплекси су први пут уведени у [4] под називом „Тверберг неизбежни симплицијални комплекси” као главни елемент за анализу проблема Твербергoвог типа. У овом поглављу анализирамо ове комплексе у контексту једне инваријанте симплицијалних комплекса који могу да се представе као спајање ауто-дуалних комплекса ради ефикасније примене Последице 2.1. Материјал из овог поглавља је базиран на раду [15]. Ради детаљнијег увида у особине и примену неизбежних симплицијалних комплекса читаоцу се препоручује [16].

4.1 Партициона инваријанта π и $r-$неизбежност

Партициона инваријанта симплицијалног комплекса је уведена у [16] ради истраживања проблема Ван Кампен-Флоресовог и Твербергoвог типа. Приметимо да по Теореми 2.3 тврђење **(2)**, над-дуални симплицијални комплекси садрже бар један симплекс сваке партиције $\{A, A^c\}$ скупа V на дисјунктне скупове. Мотивисани овим запажањем, уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 4.1. *Партициона инваријанта (или $\pi-$инваријанта) симплицијалног комплекса K у амбијенту V, у ознаци $\pi(K)$, је најмањи природан број p такав да за сваку партицију $A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_p$ амбијента V на дисјукнктне подскупове, бар један од скупова A_i припада комплексу K.*

Партициона инваријанта је очигледно комбинаторна инваријанта симплицијалног комплекса. У наставку, фамилију $\mathcal{P}_r = \{A_1, \ldots, A_r\} \subseteq 2^V$ дисјунктних скупова називамо партицијом скупа V акко је $V = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_r$. Ако је бар један од скупова партиције $\mathcal{P}$ празан скуп, партицију $\mathcal{P}_r$ називамо тривијалном. Ако је $\mathcal{P}_r \cap K \neq \emptyset$, кажемо да комплекс K задовољава партицију $\mathcal{P}_r$.

Дефиниција 4.2. *Симплицијални комплекс $K \subseteq 2^V$ је $r-$неизбежан у амбијенту V ако је $\pi(K) \leq r$. Еквивалентно, комплекс K је $r-$неизбежан акко за сваку партицију $\mathcal{P}_r = (A_1, \ldots, A_r)$ амбијента V важи $\mathcal{P}_r \cap K \neq \emptyset$.*

Приметимо да ако је партиција $\mathcal{P}$ амбијента V тривијална, сваки симплицијални комплекс $\emptyset \neq K \subseteq 2^V$ је такав да $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P} \cap K$. Како су све партиције амбијента V на $|V| + 1$ скупова тривијалне, закључујемо да је комплекс K увек $(|V| + 1)-$неизбежан. Ако комплекс $K \subseteq 2^V$ садржи бар једно теме он је $|V|-$неизбежан јер једина не-тривијална партиција скупа V на $|V|$ скупова је партиција на врхове.

Тврђење 4.1. *Ако је симплицијални комплекс $K \subseteq 2^V$ $r-$неизбежан, тада је он и $s-$неизбежан за све $s \geq r$.*

Доказ: Ако је $\mathcal{P}_s = \{A_1, \ldots, A_s\}$ произвољна партиција скупа V, тада је $\mathcal{P}_r = \{A_1, \ldots, A_{r-1}, A_r \cup \cdots \cup A_s\}$ партиција скупа V за коју је по претпоставци $\mathcal{P}_r \cap K \neq \emptyset$. Ако $A_i \in K$ за неко $i \in [r-1]$, тада је и $A_i \in \mathcal{P}_s \cap K$. Ако $A_r \cup \cdots \cup A_s \in K$, како је K симплицијални комплекс, сви симплекси A_{r+i}, припадају комплексу K односно, $\{A_r, \ldots, A_s\} \subset \mathcal{P}_s \cap K$. □

Једини $1-$неизбежан симплицијални комплекс у амбијету V је Δ_V јер само он задовољава партицију $\mathcal{P}_1 = \{V\}$. По Теореми 2.3, над-дуални симплицјални комплекси су $2-$неизбежни а под-дуални или транцендентни комплекси имају ниво неизбежности већи од 2. Дакле, ниво неизбежности симплицијалног комплекса $K \neq \emptyset$ није ограничен одозго али јесте ограничен одоздо те има своју минималну вредност.

Тврђење 4.2. *Ако су $K, L \subseteq V$ симплицијални комплекси такви да је $L \subseteq K$, тада је $\pi(K) \leq \pi(L)$.*

Доказ: Ако је $\pi(L) = r$, тада за сваку партицију $\mathcal{P}_r$ амбијента V важи да је $\emptyset \neq \mathcal{P}_r \cap L \subseteq \mathcal{P}_r \cap K$ што потврђује да је K комплекс који је $r-$неизбежан односно да је $\pi(K) \leq r$. □

У доказу претходног тврђења смо видели да ако је $r-$неизбежан комплекс L поткомплекс комплекса K, тада и K мора да буде $r-$неизбежан. Зато уводимо нови појам комплекса који су минимално $r-$неизбежни у односу на релацију „бити поткомплекс”.

Дефиниција 4.3. *Симплицијални комплекс $K \subseteq 2^V$ је минимално $r-$неизбежан акко сваки његов прави поткомплекс није $r-$неизбежан.*

Еквивалентно, комплекс K је минимално $r-$неизбежан акко за сваки главни симплекс A комплекса K, поткомплекс $K \setminus \{A\}$ није $r-$неизбежан што нам омогућава да формулишемо следеће тврђење.

Лема 4.1. *Нека је $K \subseteq 2^V$ r-неизбежан симплицијални комплекс. Тада, K је минимално $r-$неизбежан акко за сваки главни симплекс $A \in Gl(K)$ постоји бар једна нетривијална партиција $\mathcal{P}_r = \{A, A_2, \ldots, A_r\}$ скупа V таква да је $\mathcal{P}_r \cap K = \{A\}$.*

Доказ: Нека је r-неизбежан симплицијални комплекс $K \subseteq 2^V$ минималан. Претпоставимо супротно, тј. нека постоји симплекс $A \in Gl(K)$ такав да за сваку нетривијалну партицију $\mathcal{P}_r = \{A, A_2, \ldots, A_r\}$ скупа V важи $\{A, A_{i_0}\} \subseteq \mathcal{P}_r \cap K$. Тада, произвољна нетривијална партиција $\mathcal{P}_r$ амбијента

V је таква да ако $\mathcal{P}_r$ не садржи A, због $r-$неизбежности комплекса K, партиција $\mathcal{P}_r$ је задовољена неким симплексом $B \in K \setminus \{A\}$, а ако $\mathcal{P}_r$ садржи A, она је због претпоставке задовољена још неким симплексом комплекса $K \setminus \{A\}$. Отуда, поткомплекс $K \setminus \{A\}$ комплекса K задовољава сваку партицију $\mathcal{P}_r$ те је $r-$ неизбежан што нарушава минималност комплекса K.

Нека r-неизбежан комплекс K има особину да сваком главном симплексу $A \in Gl(K)$ одговара партиција $\mathcal{P}_r^A$ скупа V таква да је $\mathcal{P}_r^A \cap K = \{A\}$. Тада, за прозвољно $A \in Gl(A)$ важи да је $\mathcal{P}_r^A \cap (K \setminus \{A\}) = \emptyset$ што потврђује да $K \setminus \{A\}$ није $r-$неизбежан. $\square$

Последица 4.1. *Сваки $r-$неизбежан симплицијални комплекс садржи минимално $r-$неизбежан поткомплекс.*

Доказ: Ако је $K = \{\emptyset\}$ тада је он $(|V|+1)-$неизбежан а како постоји партиција $\big\{\{v_1\}, \{v_2\}, \ldots, \{v_{|V|}\}, \emptyset\big\}$ коју задовољава само главни симплекс $\emptyset$, то по Леми 4.1 имплицира да је $K = \{\emptyset\}$ минимално $|V|+1-$неизбежан.

Конструишимо минимално $r-$неизбежан поткомплекс комплекса K.

Нека је $K_0 = K$.

Ако постоји симплекс $A \in Gl(K_i)$ такав да за сваку партицију $\mathcal{P}_r^A$ која садржи A важи да је $|\mathcal{P}_r^A \cap K| \geq 2$, нека је тада $K_{i+1} = K_i \setminus \{A\}$. Тада, комплекс K_{i+1} је такође $r-$неизбежан јер све партиције $\mathcal{P}_r$ амбијента V садрже неки симплекс $B \in K_i \setminus \{A\}$.

Итерацијом претходног процеса добијамо низ $r-$неизбежних поткомплекса комплекса K:

$$K = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_k$$

Овај процес мора да се заустави јер избацивањем главних симплекса у крајњој линији добијамо минимално $(|V|+1)-$неизбежан симплицијални комплекс $K_k = \{\emptyset\}$. Дакле, добили смо поткомплекс $K_k \subseteq K$ који је $r-$неизбежан такав главним симплексима $A \in Gl(K_k)$ одговара бар једна партиција $\mathcal{P}_r$ скупа V таква да је $\mathcal{P}_r \cap K_k = \{A\}$ што по Леми 4.1 доказује да је K_k минимално $r-$неизбежан. $\square$

Пример 4.1. Сваки над-дуалан симплицијални комплекс у амбијенту V садржи минималан $2-$неизбежан поткомплекс а ауто-дуални симплицијални комплекси $K \subseteq 2^V$ су минимално $2-$неизбежни јер по Теореми 2.3 сваком симплексу $A \in K$ одговара партиција $\{A, A^c\}$ скупа V таква да је $K \cap \{A, A^c\} = \{A\}$ што потврђује Лему 4.1.

Генерализацијом Примера 2.2 можемо да опишемо једну фамилију минимално $r-$неизбежних симплицијалних комплекса за произвољно $r > 2$.

Пример 4.2. За $r, k > 2$, комплекс $\binom{[rk-1]}{k-1}$ је минимално $r-$неизбежан.

Прво, K јесте r-неизбежан јер једина могућност да комплекс $\binom{[rk-1]}{k-1}$ не задовољава партицију $\mathcal{P}_r = \{A_1, \dots, A_r\}$ скупа $[rk-1]$ је ако сваки симплекс $A_i \in \mathcal{P}$ буде кардиналности веће од $k-1$. Тада је $rk - 1 = |A_1 \sqcup \dots \sqcup A_r| = |A_1| + \dots + |A_r| \geq rk$ што није могуће.

Друго, симплекс A је главни симплекс комплекса $\binom{[rk-1]}{k-1}$ акко је кардиналности $k-1$. Тада, за произвољно $A \in Gl\left(\binom{[rk-1]}{k-1}\right)$, постоји нетривијална партиција $\mathcal{P}_r^A = \{A_1, \dots, A_{r-1}, A\}$ скупа $[rk-1]$, где је $|A_1| = \dots = |A_{r-1}| = k$, таква да је $\mathcal{P}_r^A \cap \binom{[rk-1]}{k-1} = \{A\}$.

Пример 4.3. Једини минимални 3-неизбежан симплицијални комплекс у амбијенту $[5]$ који садржи свих 5 темена је $\binom{[5]}{1}$ јер, на основу претходног примера, овај комплекс јесте минимално $3-$неизбежан па је сваки његов прави надкомплекс 3-неизбежан али не може да буде минималан.

У Примеру 2.3, као и у Тврђењу 2.2, смо видели да увећањем амбијента симплицијалног комплекса мењамо његову дуалну категоризацију. Нешто слично се дешава и у случају $r-$неизбежности што илуструје следеће тврђење.

Тврђење 4.3. *Нека је K симплицијални комплекс који је $r-$неизбежан у амбијенту $[n]$. Тада, комплекс K у амбијенту $[n+k]$ је $(r+k)$-неизбежан за све $k \in \mathbb{N}$. Ако је $K \subseteq 2^{[n]}$ минимално r-неизбежан, тада је $K \subseteq 2^{[n+k]}$ минимално $(r+k)$-неизбежан.*

Доказ: Нека је $K \subseteq 2^{[n]}$ $r-$неизбежан и нека је $\mathcal{P}_{r+1} = \{A_1, \cdots, A_r, A_{r+1}\}$ партиција скупа $[n+1]$. Тада, врх $\{n+1\}$ је садржан у неком симплексу партиције $\mathcal{P}_{r+1}$, на пример у A_{r+1}. То нам омогућава да помоћу симплекса $B = A_r \cup A_{r+1} \setminus \{n+1\}$ добијемо партицију $\mathcal{P}_r = \{A_1, \cdots, A_{r-1}, B\}$ скупа $[n]$ коју због $r-$неизбежности комплекс $K \subseteq 2^{[n]}$ мора да задовољава. Ако је $A = A_i \in K$ за неко $i \in [r-1]$, тада је $A_i \in \mathcal{P}_{r+1} \cap K$. Ако је $A = B$ тада, како је K симплицијални комплекс и $A_r \subseteq B$, имамо да $A_r \in K$ па $A_r \in \mathcal{P}_{r+1} \cap K$. Дакле, комплекс K задовољава произвољну партицију $\mathcal{P}_{r+1}$ скупа V што доказује да је комплекс K $(r+1)$-неизбежан у амбијенту $[n+1]$.

Ако је комплекс $K \subseteq 2^{[n]}$ и минимално r-неизбежан, на основу Леме 4.1, сваком главном симплексу $A \in Gl(K)$ одговара партиција $\mathcal{P}_r^A$ скупа $[n]$ таква да је $\mathcal{P}_r^A \cap K = \{A\}$. Тада, фамилија $\mathcal{P}_r^A \cup \big\{\{n\}\big\}$ је партиција скупа $[n+1]$ таква да је $\big(\mathcal{P}_r^A \cup \big\{\{n\}\big\}\big) \cap K = \{A\}$ јер $\{n+1\} \notin K$. Отуда, по Леми 4.1, комплекс $K \subseteq 2^{[n+1]}$ је минимално $(r+1)$-неизбежан. $\square$

Пример 4.4. Присетимо се да је по Примеру 2.3, симплицијални комплекс $\Delta_{\{1\}}$ ауто-дуалан у амбијенту $[2]$. Тада, на основу претходног тврђења, комплекс $\Delta_{\{1\}}$ је минимално $n-$неизбежан у амбијенту $[n]$. Тако закључујемо да су једини минимално $|V|-$неизбежни комплекси у амбијенту V триангулације тачака $\Delta_{\{v\}}$.

Претходно тврђење нам омогућава да помоћу техника описаних у Поглављу 3 конструишемо примере минимално $r-$неизбежних симплицијалних комплекса у прозвољном амбијенту.

Сада наводимо још један практичан критеријум за проверу минималне $r-$неизбежности. Пре тога, уводимо нову операцију „пресека” симплекса $A \subseteq V$ и фамилије скупова $K \subseteq 2^V$ са:

$$K \sqcap A = \{A \cap B \mid B \in K\} \tag{4.1}$$

Ако је K симплицијални комплекс, тада $K \sqcap A$ је поткомплекс комплекса K кога чине сви симплекси комплекса K који су садржани у A односно $K \sqcap A = K \cap \Delta_A$.

Тврђење 4.4. *Нека је $K \subset 2^V$ симплицијални комплекс који је $r-$неизбежан. Тада, K је минимално $r-$неизбежан акко за сваки главни симплекс A комплекса K поткомплекс $K \sqcap V \setminus A$ није $(r-1)-$неизбежан у амбијенту $V \setminus A$.*

Доказ: Докажимо да су испуњени услови Леме 4.1.
$(\Rightarrow)$ Нека је $K \subseteq 2^V$ минимално $r-$неизбежан симплицијални комплекс. Тада, за произвољно $A \in Gl(K)$ постоји партиција $\mathcal{P}_r^A$ супа V таква да је $K \cap \mathcal{P}_r^A = \{A\}$. То имплицира да је $\mathcal{P}_{r-1} = \mathcal{P}_r^A \setminus \{A\}$ партиција скупа $V \setminus A$ таква да је $K \cap \mathcal{P}_{r-1} = \emptyset$. Како је $K \sqcap A \subset K$, добијамо да је $(K \sqcap A) \cap \mathcal{P}_{r-1} = \emptyset$ што потврђује да $K \sqcap A \subset 2^{V \setminus A}$ није $(r-1)-$неизбежан.
$(\Leftarrow)$ Нека $K \sqcap A$ није $(r-1)-$неизбежан у амбијенту $V \setminus A$ за све $A \in Gl(K)$. Тада, за произвољно $A \in Gl(K)$, постоји партиција $\mathcal{P}_{r-1} = \{A_1, \ldots, A_{r-1}\}$ амбијента $V \setminus A$ таква да је $(K \sqcap A) \cap \mathcal{P}_{r-1} = \emptyset$. То значи да је $\mathcal{P}_r = \mathcal{P}_{r-1} \cup \{A\}$ партиција амбијента V таква да је $K \cap \mathcal{P}_r = \{A\}$. □

Последица 4.2. *Ако је $K \subseteq 2^V$ минимално $r-$неизбежан симплицијални комплекс тада је $\pi(K) = r$.*

Доказ: Због $r-$неизбежсти комплекса K знамо да је $\pi(K) \leq r$. Због минималности комплекса K, за произвољан главни симплекс $A \in K$, постоји партиција $\mathcal{P}_{r-1} = \{A_1, \ldots, A_{r-1}\}$ скупа $V \setminus A$ таква да је $\mathcal{P}_{r-1} \cap (K \sqcap A) = \emptyset$. Тада је $\{A \cup B_1, B_2, \ldots, B_{r-1}\}$ партиција амбијента V коју комплекс K не задовољава што доказује да је $\pi(K) \geq r$. □

4.2 Неизбежност спајања симплицијалних комплекса

У овом одељку анализирамо партициону инваријанту симплицијалних комплекса добијених спајањем комплекса са познатом партиционом инваријантом. У општем случају, помоћу $r-$неизбежности компонената спајања мо жемо да проценимо ниво неизбежности резултујућег комплекса.

Прво докажимо једно помоћно тврђење.

Лема 4.2. *За сваки $r-$неизбежан симплицијални комплекс $K \subseteq 2^V$ и сваку партицију $\mathcal{P}_s$ скупа V где је $s \geq r$ важи да је:*

$$|\mathcal{P}_s \cap K| \geq s - r + 1.$$

Доказ: Нека је $K \subseteq 2^V$ комплекс који је $r-$неизбежан и нека је $s \geq r$. Претпоставимо да постоји партиција $\mathcal{P}_s = \{A_1, \ldots, A_s\}$ скупа V таква да је $\mathcal{P}_s \cap K = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$ где је $k \leq s - r$. Тада, помоћу скупова разлике $\mathcal{P}_s \setminus \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\} = \{A_{j_1}, \ldots, A_{j_{s-k}}\}$, можемо да конструишемо партицију $\mathcal{P}_{s-k} = \{A_{j_1}, \ldots, A_{j_{s-k}} \cup A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}\}$ скупа V такву да је $\mathcal{P}_{s-k} \cap K = \emptyset$. Како је $s - k \leq s - (s - r) = r$ закључујемо да $r-$неизбежан комплекс K не задовољава партицију $\mathcal{P}_{s-k}$ што није могуће. $\square$

Теорема 4.1. *Нека су $K_i \subseteq 2^{V_i}$ симплицијални комплекси који су r_i-неизбежни за $i = 1, \ldots, n$. Тада, симплицијални комплекс $K_1 * \cdots * K_n$ је $r-$неизбежан у амбијенту $V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_n$ где је*

$$r = r_1 + \cdots + r_n - n + 1.$$

Доказ: Без губљења општости можемо да претпоставимо да су амбијенти $V_1, \ldots, V_n$ дисјунктни што нам омогућава да у Дефиницији 1.6 спајања користимо класичну унију симплекса.

Доказ радимо индукцијом по $n \in \mathbb{N}$.

Нека је $K_1 \subseteq 2^{V_1}$ комплекс који је r_1-неизбежан а $K_2 \subseteq 2^{V_2}$ комплекс који је r_2-неизбежан. Нека је $r = r_1 + r_2 - 1$ и нека је $\mathcal{P}_r = \{A_1, \ldots, A_r\}$ произвољна партиција скупа $V_1 \cup V_2$. Тада, $\mathcal{P}_r^1 = \mathcal{P}_r \sqcap V_1$ је партиција амбијента V_1 а $\mathcal{P}_r^2 = \mathcal{P}_r \sqcap V_2$ је партиција амбијента V_2.

Нека је $\mathcal{P}_r^1 \cap K_1 = \{A_i \cap V_1 \mid i \in I_1\}$ а $\mathcal{P}_r^2 \cap K_2 = \{A_i \cap V_2 \mid i \in I_2\}$. Тада по Леми 4.2 важи да је $|I_1| \geq r - r_1 + 1 = r_2$ и $|I_2| \geq r - r_2 + 1 = r_1$. Како је $|I_1| + |I_2| \geq r_1 + r_2 > r$, а $I_1 \cup I_2 \subseteq [r]$, закључујемо да је $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ односно да постоји $k \in I_1 \cap I_2$. То значи да $A_k \cap V_1 \in K_1$ и $A_k \cap V_2 \in K_2$ што имплицира да симплекс $(A_k \cap V_1) \cup (A_k \cap V_2) = A_k$ припада спајању $K_1 * K_2$ односно, открили смо симплекс партиције $\mathcal{P}_r$ који припада комплексу $K_1 * K_2$.

Претпоставимо индуктивно да је $K_1 * \cdots * K_{n-1}$ симплицијални комплекс који је $(r_1 + \cdots + r_{n-1} - n + 2)-$неизбежан.

Тада, како су амбијенти V_i, $i = 1, \ldots, n$ дисјунктни, комплекс $K = K_1 * \cdots * K_n$ је заправо спајање $K = (K_1 * \cdots * K_{n-1}) * K_n$. Ако је K_n комплекс који је r_n-неизбежан и ако комплекс K посматрамо као спајање два комплекса, онда је на основу већ доказаног он $r-$неизбежан за

$$r = r_1 + \cdots + r_{n-1} - n + 2 + r_n - 1 = r_1 + \cdots + r_n - n + 1.$$

□

Последица 4.3. *Ако симплицијални комплекс K може да се представи као спајање $K_1 * \cdots * K_n$, тада је:*

$$\pi(K) \leq \pi(K_1) + \cdots + \pi(K_n) - n + 1.$$

Претходна последица нам омогућава да одредимо горњу границу партиционе инваријате спајања комплекса. Међутим, партициону инваријанту спајања можемо потпуно да одредимо у једном посебном случају.

Тврђење 4.5. *Ако су симплицијални комплекси $K_i \subsetneq 2^{V_i}$ минимално r_i-неизбежни за $i = 1 \ldots, n$, тада је симплицијални комплекс $K_1 * \cdots * K_n$ минимално $r-$неизбежан у амбијенту $V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_n$ за $r = r_1 + \cdots + r_n - n + 1$.*

Доказ: По Теореми 4.1, знамо да је $K = K_1 * \cdots * K_n$ симплицијални комплекс који је $(r_1 + \cdots + r_n - n + 1)-$неизбежан. Докажимо да је минималан. Опет претпостављамо да су амбијенти $V_1, \ldots, V_n$ дисјунктни.

Нека је $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ произвољан главни симплекс комплекса K. Тада, за свако $i = 1, \ldots, n$, симплекс A_i је главни симплекс мининалног r_i-неизбежног комплекса K_i па, на основу Леме 4.1, постоји партиција $\mathcal{P}_{r_i}$ амбијента V_i таква да је $\mathcal{P}_{r_i} \cap K_i = \{A_i\}$. Како је $K_i \subset K$ а амбијенти V_i дисјунктни, закључујемо да је $\mathcal{P}_{r_i} \cap K \subseteq \Delta_{V_i} \cap K = K_i$ односно да је $\mathcal{P}_{r_i} \cap K = \{A_i\}$.

Сада, за партицију $\mathcal{P}_r^A = \{A_1 \cup \cdots \cup A_n\} \cup (\mathcal{P}_{r_1} \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{r_n}) \setminus \{A_1, \ldots, A_n\}$ амбијента $V_1 \cup \cdots \cup V_n$ важи:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_r^A \cap K &= (\{A\} \cap K) \cup \big((\mathcal{P}_{r_1} \setminus \{A_1\}) \cap K\big) \cup \cdots \cup \big((\mathcal{P}_{r_n} \setminus \{A_n\}) \cap K\big) \\ &= \{A\} \cup \emptyset \cup \cdots \cup \emptyset = \{A\}.\end{aligned}$$

Дакле, произвољном симплексу $A \in Gl(K)$ одговара партиција $\mathcal{P}_r^A$ амбијента $V_1 \cup \cdots \cup V_n$ на $r_1 + \cdots + r_n - n + 1$ скупова таква да је $\mathcal{P}_r^A \cap K = \{A\}$ што на основу Леме 4.1 потврђује да је комплекс K минимално $(r_1 + \cdots + r_n - n + 1)-$неизбежан. □

Пример 4.5. Једна од последица Тврђења 3.8 је да конструкцијом конуса ауто-дуалног симплицијалног комплекса у амбијенту V добијамо ауто-дуални симплицијални комплекс у амбијенту $V \sqcup \{v\}$. Нешто слично се дешава и у случају минимално $r-$неизбежних комплекса. Прво, комплекс $\Delta_{\{v\}}$ је минимално $1-$неизбежан у амбијенту $\{v\}$. Тада, ако је K минимално $r-$неизбежан симплицијални комплекс у амбијенту V, по Тврђењу 4.5, комплекс $\mathrm{C}K = K * \Delta_{\{v\}}$ је минимално $r+1-2+1 = r-$неизбежан у амбијенту $V \sqcup \{v\}$.

Пример 4.6. Ако је K симплицијални комплекс који је (минимално) $r-$неизбежан, тада је симплицијални комплекс $K^{*n} = K * \cdots * K$ (минмално) $(n(r-1)+1)-$неизбежан. Ако је K ауто-дуалан, он је по Примеру 4.1 минимално $2-$неизбежан, што имплицира да је K^{*n} комплекс који је минимално $(n+1)-$неизбежан. У општем случају, ако је $K_1, \ldots, K_n$ произвољан низ ауто дуалних комплекса, тада је њихово спајање $K_1 * \cdots * K_n$ комплекс који је минимално $(n+1)-$неизбежан.

Претходна опсервација нам вишеструко олакшава примену Последице 2.1 ради одређивања геометријског амбијента датог симплицијалног комплекса. Ако је спајање n аутодуалних комплекса садржано у комплексу K, тада комплекс K мора да буде $(n+1)-$неизбежан. Отуда, по Тврђењу 4.2, партициона инваријанта симплицијалног комплекса одређује минималан број ауто-дуалних компоненти које могу да учествују у спајању односно ако је $\pi(K) = n$, тада у спајању може да учествује најмање n ауто-дуалних симплицијалних комплекса.

За разлику од над-дуалности комплекса која може да се провери широким спектром апарата описаних у Поглављу 3, процена нивоа неизбежности симплицијалних комплекса у крајњој линији подразумева проверу да ли су партиције амбијентог скупа задовољене. Ако је $|V| = n$ тада постоји

$$\sum_{\substack{1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_r \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n}} \prod_{i=1}^{r-1} \binom{\sum_{j=i}^{r} n_j}{n_i}$$

нетривијалних партиција скупа V на r потскупова. Ако је n значајно веће од r, број различитих партиција је велики чак и за рачунарску проверу. Због тога, у наставку ће да буде описан један метод процене нивоа неизбежности симплицијалног комплекса техникама линеарног програмирања.

4.3 Линеарно реализабилни $r-$неизбежни комплекси

У овом одељку анализирамо једну посебну класу симплицијалних комплекса добијених ограничавањем позитивне адитивне мере дефинисане на њховом амбијенту.

Позитивна мера је функција $\mu : [n] \to \mathbb{R}_+$. Као дискретна функција, свака мера је одређена вектором $\mu = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Мера μ индукује адитивну меру $\mu : 2^{[n]} \to \mathbb{R}_+$ дату са $\mu(A) = \sum_{i \in A} \mu(i)$. Ако је $\mu([n]) = 1$ адитивна мера је вероватносна мера. Тада, фамилија свих вероватносних мера на амбијенту $[n]$ је скуп:

$$\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid \alpha_1 + \cdots + \cdots \alpha_n = 1\} = \mathrm{Conv}\{e_1, \ldots, e_n\} = \sigma_{\{e_1, \ldots, e_n\}}$$

односно, вероватносне мере на скупу $[n]$ представљају геометријски симплекс димензије $n-1$ којег означавамо са Δ^{n-1}.

Свакој адитивној мери $\mu : 2^{[n]} \to \mathbb{R}_+$ и сваком позитивом реалном броју β додељујемо симплицијални комплекс:

$$K_{\mu \leq \beta} = \{A \in 2^{[n]} \mid \mu(A) \leq \beta\}. \tag{4.2}$$

Константу β називамо праг комплекса $K_{\mu \leq \beta}$.

Тврђење 4.6. *Нека је μ позитивна адитивна мера на скупу $[n]$ и нека је $\mu([n]) = \alpha$ и $r \in \mathbb{N}$. Тада је $\pi(K_{\mu \leq \frac{\alpha}{r}}) \leq r$ односно симплицијални комплекс $K_{\mu \leq \frac{\alpha}{r}}$ је $r-$неизбежан. Ако је μ вероватносна мера, тада је $K_{\mu \leq \frac{1}{r}}$ комплекс који је $r-$неизбежан.*

Доказ: Нека је $\mathcal{P}_r = \{A_1, \ldots, A_r\}$ произвољна партиција амбијента $[n]$. Тада, $\mathcal{P}_r \cap K_{\mu \leq \frac{\alpha}{r}} = \emptyset$ акко је $\mu(A_i) > \frac{\alpha}{r}$ за све $i \in [r]$. Како је мера μ адитивна, то имплицира да је:

$$\alpha = \mu([n]) = \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_r) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_r) > r\frac{\alpha}{r} = \alpha$$

што није могуће. $\square$

Ради прецизног одређивања партиционе инваријанте комплекса $K_{\mu \leq \frac{\alpha}{r}}$, потребно је описати мере које производе минимално $r-$неизбежне комплексе.

Тврђење 4.7. *Нека је μ позитивна адитивна мера и $\mu([n]) = \alpha$. Ако је комплекс $K_{\mu \leq \frac{\alpha}{r}}$ минимално r-неизбежан тада је $K_{\mu \leq \frac{\alpha}{r}} = K_{\mu < \frac{\alpha}{r}}$.*

Доказ: Нека је $K_{\mu\leq\frac{\alpha}{r}}$ минимално r-неизбежан. Претпоставимо супротно, тј. нека постоји симплекс $A\in K$ тако да је $\mu(A)=\frac{\alpha}{r}$. Тада, постоји главни симплекс $B\in Gl(K)$ такав да је $\mu(B)=\frac{\alpha}{r}$ (ако је $\mu(i)>0$ за све $i\in[n]$, тада је $B=A$ а ако је $\mu(i_1)=\cdots=\mu(i_k)=0$, тада је $B=A\cup\{i_1,\ldots,i_k\}$). Нека је $\mathcal{P}_r^B=\{B,A_2,\cdots,A_r\}$ произвољна партиција скупа $[n]$ која садржи симплекс B. Тада, $\mu([n]\setminus B)=\mu(A_2)+\cdots+\mu(A_r)=\alpha-\frac{\alpha}{r}=(r-1)\frac{\alpha}{r}$. Отуда, ако је $\mathcal{P}_r^B\cap K_{\mu\leq\frac{\alpha}{r}}=\{B\}$, тада је $\mu(A_i)>\frac{\alpha}{r}$ за све $i=2,\ldots,r$ па добијамо да је $\mu(A_2)+\cdots+\mu(A_r)>(r-1)\frac{\alpha}{r}$ што није могуће. Дакле, сваку партицију која садржи скуп B задовољава бар још један симплекс комплекса K што на основу Леме 4.1 имплицира да $K_{\mu\leq\frac{\alpha}{r}}$ није минимално $r-$неизбежан. □

У општем случају, услов да је $K_{\mu\leq\frac{\alpha}{r}}=K_{\mu<\frac{\alpha}{r}}$ не мора да имплицира минималност комплеса $K_{\mu\leq\frac{\alpha}{r}}$. На пример, мера μ одређења вектором $(0,1,1,1,1)$ индукује комплекс $K_{\mu\leq\frac{4}{3}}=K_{\mu<\frac{4}{3}}$ који је $3-$неизбежан и садржи свих 5 темена али и симплекс $\{1,2\}$ па, на основу Примера 4.3, комплекс $K_{\mu\leq\frac{4}{3}}$ није минималан.

Међутим, Тврђење 4.7 јесте еквиваленција у једном специјалном случају.

Тврђење 4.8. *Ако је μ позитивна адитивна мера за коју је $\mu([n])=\alpha$, тада комплекс $K_{\mu\leq\frac{\alpha}{2}}$ је минимално $2-$неизбежан акко је $K_{\mu\leq\frac{\alpha}{2}}=K_{\mu<\frac{\alpha}{2}}$.*

Доказ:($\Rightarrow$) По Тврђењу 4.7 из услова минималности следи $K_{\mu\leq\frac{\alpha}{2}}=K_{\mu<\frac{\alpha}{2}}$.
($\Leftarrow$)Нека је $K_{\mu\leq\frac{\alpha}{2}}=K_{\mu<\frac{\alpha}{2}}$. Тада, за сваки симплекс $A\in 2^{[n]}$ важи да је $\mu(A)\neq\frac{\alpha}{2}$. Отуда, за произвољан $A\subset[n]$ важи $\mu(A)<\frac{\alpha}{2}$ акко је $\mu(A^c)>\frac{\alpha}{2}$ што значи да $A\in K_{\mu<\frac{\alpha}{2}}$ акко $A^c\notin K_{\mu<\frac{\alpha}{2}}$ што по Теореми 2.3 имплицира да је $K_{\mu<\frac{\alpha}{2}}$ ауто-дуалан односно минимално $2-$неизбежан. □

Сада уводимо дефиницију посебне класе симплицијалних комплекса на које можемо да применимо Тврђење 4.6.

Дефиниција 4.4. *Кажемо да је $r-$неизбежан симплицијални комплекс K у амбијенту $[n]$ линеарно реализабилан ако је $K=K_{\mu\leq\frac{\alpha}{r}}$ за неку вероватносну меру μ на скупу $[n]$.*

Комплекси из Дефиниције 4.4 су представљају специјалан случај линеарно реализабилних комплекса добијених помоћу произвољне вероватносне мере и произвољне вредности прага. У раду [30] је доказано да је комплекс K линеарно реализабилан акко је „трговински крут” односно ако произвољан низ $A_1,\ldots,A_k$ симплекса фамилије $2^{[n]}\setminus K$ није могуће трансформисати у низ симплекса комплекса K разменом врхова међу симплексима. Постоји још неколико комбинаторних категоризација линеарно реализабилних комплекса међутим, оне нису погодне за примену Тврђења 4.6 јер не обезбеђују праг.

Провера линеарне реализабилности симплицијалног комплекса K се своди на налажење решења проблема линеарног програмирања.

Нека је $\chi : 2^{[n]} \to \{0,1\}^n$ пресликавање које сваком симплексу $A \subseteq [n]$ додељује карактеристични вектор $\chi(A) \in \{0,1\}^n$ дат са:

$$\chi(A)_i = \begin{cases} 0, & i \notin A, \\ 1, & i \in A. \end{cases}$$

Тада, комплекс K је линеарно реализабилан акко постоји адитивна мера $\mu = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$ и праг $\beta \in \mathbb{R}_+$ који задовољавају услове:

$$\begin{array}{lll} \langle \mu, (1,\ldots,1)\rangle = 1, & & \\ \langle \mu, \chi(A)\rangle \leq \beta & \text{за све} & A \in K, \\ \langle \mu, \chi(A)\rangle > \beta & \text{за све} & A \in 2^{[n]} \setminus K. \end{array} \tag{4.3}$$

Као што је описано у [31], услови (4.3) имају лепу геометријску интерпретацију. Симплицијалном комплексу $K \subseteq 2^{[n]}$ и комплементу $2^{[n]} \setminus K$ додељујемо потскупове куба $[0,1]^n$:

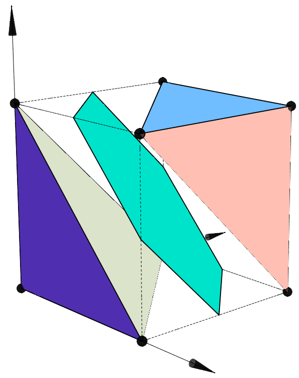
$$\chi(K) = \{\chi(A) \mid A \in K\}, \quad \chi(2^{[n]} \setminus K) = \{\chi(A) \mid A \in 2^{[n]} \setminus K\}.$$

Ако је $H^-(\mu,\beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mu, x\rangle \leq \beta\}$ полу-простор чија је граница хиперраван $\langle \mu, x\rangle = \beta$ а $H^+(\mu,\beta) = \mathbb{R}^n \setminus H^-(\mu,\beta)$, тада услови (4.3) могу да се интерпретирају са:

$$\begin{array}{l} \mu \in \Delta^{n-1}, \\ \mathrm{Conv}\big(\chi(K)\big) \subset H^-(\mu,\beta), \\ \mathrm{Conv}\big(\chi(2^{[n]} \setminus K)\big) \subset H^+(\mu,\beta). \end{array} \tag{4.4}$$

Дакле, комплекс K је линеарно реализабилан акко полиедри $\mathrm{Conv}\big(\chi(K)\big)$ и $\mathrm{Conv}\big(\chi(2^{[n]} \setminus K)\big)$ могу да се раздвоје помоћу хиперравни чији вектор нормале припада симплексу Δ^{n-1}. Услови (4.4) имплицирају да је $\mathrm{Conv}\big(\chi(K)\big) \cap \mathrm{Conv}\big(\chi(2^{[n]} \setminus K)\big) = \emptyset$. Међутим, важи и обрнуто тј. ако је $\mathrm{Conv}\big(\chi(K)\big) \cap \mathrm{Conv}\big(\chi(2^{[n]} \setminus K)\big) = \emptyset$ тада постоји хиперраван $\langle \mu, x\rangle = \beta$ која раздваја ове полиедре а услов да $\mu \in \Delta^{n-1}$ се постиже скаларним множењем. Ова једноставна опсервација нам омогућава да закључимо да линеарна реализабилност не зависи од амбијента симплицијалног комплекса јер ако су полиедри $\mathrm{Conv}\big(\chi(K)\big)$ и $\mathrm{Conv}\big(\chi(2^{[n]} \setminus K)\big)$ дисјунктни у $\mathbb{R}^n$, они морају да буду дисјунктни и у $\mathbb{R}^m$ за све $m \geq n$.

Илустрација услова (4.4) и одговарајућих полиедара за ауто-дуалан комплекс $\binom{[3]}{1} \subseteq 2^{[3]}$ је дата на Фигури 17. Са Фигуре 17 је такође јасно да је сваки симплицијални комплекс у амбијенту $[3]$ линеарно реализабилан. Најмањи пример симплицијалног комплекса који није линеарно реализабилан је $\Delta_{[2]} \cup \Delta_{\{3,4\}} \subseteq 2^{[4]}$.



Фигура 17: Раздвајање простора $\mathrm{Conv}\,\big(\chi(K)\big)$ и $\mathrm{Conv}\,\big(\chi(2^{[n]} \setminus K)\big)$ за симплицијални комплекс $K = \binom{[3]}{1}$.

У Примерима 3.3 и 3.4 су конструисани сви не-изоморфни ауто-дуални симплицијални комплекси у амбијенту $[4]$ и амбијенту $[5]$. Помоћу алгоритма који решава проблем (4.3) конструисаног у програму Wolfram Mathematica добијена је Табела 1 из које се види да су сви ауто-дуални комплекси у амбијенту $[4]$ и амбијенту $[5]$ линеарно реализабилни.

K	μ	β
$\Delta_{[3]}$	$(0,0,0,1)$	0
$\partial\Delta_{[3]} \cup \Delta_{\{4\}}$	$(1/5,1/5,1/5,2/5)$	$2/5$
$\binom{[3]}{1} * \Delta_{\{4\}}$	$(1/3,1/3,1/3,0)$	$1/3$
$\Delta_{[4]}$	$(0,0,0,0,1)$	0
$\partial\Delta_{[4]} \cup \Delta_{\{5\}}$	$(1/7,1/7,1/7,1/7,3/7)$	$3/7$
$(\partial\Delta_{[3]} \cup \Delta_{\{4\}}) * \Delta_{\{5\}}$	$(1/5,1/5,1/5,2/5,0)$	$2/5$
$\binom{[3]}{1} * \partial\Delta_{\{4,5\}} \cup \Delta_{[3]}$	$(1/7,1/7,1/7,2/7,2/7)$	$3/7$
$\binom{[3]}{1} * \Delta_{\{4,5\}}$	$(1/3,1/3,1/3,0,0)$	$1/3$
$\Delta_{[2]} * \Delta_{\{3,4\}} \cup \partial\Delta_{[2]} * \Delta_{\{5\}} \cup \Delta_{\{3,4\}}$	$(1/9,1/9,2/9,2/9,1/3)$	$4/9$
$\binom{[5]}{2}$	$(1/5,1/5,1/5,1/5,1/5)$	$2/5$

Табела 1: Мере и прагови линеарно реализабилних ауто-дуалних комплекса у амбијентима $[4]$ и $[5]$.

Пример 4.7. Хеми икосаедар представљен у Примеру 2.5 је минимално 2−неизбежан симплицијални комплекс. Ако претпоставимо да је он линеарно реализабилан, систем (4.3) је облика:

$$\begin{aligned}&\alpha_1+\cdots+\alpha_6=1,\\ &\langle(\alpha_1,\ldots,\alpha_6),\chi(A)\rangle<\tfrac{1}{2}\quad \text{за све}\quad A\in Gl(RP_6).\end{aligned}$$

Како је сваки врх комплекса RP_6 садржан у тачно 5 главних симплекса, сумирањем горњих неједначина добијамо:

$$\begin{aligned}&\alpha_1+\cdots+\alpha_6=1\\ &5(\alpha_1+\cdots+\alpha_6)<\tfrac{10}{2}.\end{aligned}$$

што имплицира да је $5<\frac{10}{2}$ што није могуће.

Пример 4.8. Претпоставимо да је триангулација комплексне пројективне равни из Примера 2.6 комплекс који је 2−неизбежан и линеарно реализабилан. Тада постоји мера $\mu:V\to\mathbb{R}_+$ дата са $\mu(v_i)=\alpha_i$, $i=1,\ldots,9$ таква да је $CP_9=K_{\mu<\frac{1}{2}}$.

Из система (4.3) закључујемо да за симплексе $A_i\in Gl(K)$ важе неједнакости $\mu(A_i)<\frac{1}{2}$ за $i=1,\ldots,36$. Ако сумирамо ове неједнакости добијамо неједнакост

$$\sum_{i=1}^{36}\mu(A_i)<\frac{36}{2}. \tag{4.5}$$

Нека је h_i број главних симплекса који садрже теме $v_i\in V$, $i=1,\ldots,9$. Тада, релација (4.5) може да се представи са:

$$\sum_{i=1}^{9}h_i\alpha_i<18. \tag{4.6}$$

Одредимо сада бројеве h_i. Нека је $v\in V$ произвољно теме.

Тада, ако је $l_j\in P$ врста која садржи теме v, главни симплекси фамилије G_1 који садрже теме v су: $(l_j\cup l_{j+_31})\setminus\{w\}$ где $w\in l_j\setminus\{v\}$ и $(l_{j-_31}\cup l_j)\setminus\{w\}$ где $w\in l_{j-_31}$. Оваквих симплекса има 5.

Даље, ако v припада симплексу из фамилије G_2, тада $v\in m_1\cup m_2$ где је $m_1\cap m_2=\{w\}$ и $m_1,m_2\in L\setminus P$. Овде разликујемо два случаја:

- $w=v$. Тада, m_1 и m_2 могу да буду било које две од три праве скупа $L\setminus P$ које пролазе кроз теме v. Оваквих парова има 3.

- $w \neq v$. Претпоставимо да је $v \in m_1$ а m_1 може да буде било која од три праве скупа $L \setminus P$ која пролази кроз v а тачка пресека w може да буде било која тачка праве m_1 различита од v. Тада, имамо тачно два избора праве $m_2 \in L \setminus P$ која сече праву m_1 у тачки w. Отуда, закључујемо да оваквих парова има $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Дакле, симплекса фамилије G_2 који садрже теме v има 15 што значи да главних симплекса који садрже теме v има 20. Како је теме $v \in V$ било произвољно, закључујемо да је $h_1 = h_2 = \cdots = h_9 = 20$ што заменом у (4.6) имплицира да је

$$\sum_{i=1}^{9} 20\alpha_i = 20 \sum_{i=1}^{9} \alpha_i = 20 < 18.$$

Претходни примери илуструју чињеницу да Тврђење 4.6 не може да се примени многе симплицијалне комплексе. Штавише, у раду [26] је доказано да линеарно реализабилни симплицијални комплекси имају хомотопски тип букета сфера. Како комплекса који нису букети сфера има значајно више од комплекса који то јесу, технике процене партиционе инваријанте описане у овом одељку су јако ограничене.

С обзиром да апарати линеарног програмирања имају врло развијен математички апарат и саставни су део многих програмских пакета, у наставку ће да буде описана метода процене партиционе инваријанте симплицијалних комплекса помоћу линеарног програмирања која може да се примени на сваки симплицијални комплекс.

4.4 Карактеристични праг симплицијалних комплекса

Сваки симплицијални комплекс садржи линеарно реализабилан поткомплекс (на пример, поткомплекс са највише 3 темена) а по Тврђењу 4.2, партициона инваријанта поткомплекса представља мајоранту партиционе инваријанте надкомплекса. Мотивисани овом опсервацијом, уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 4.5. *Нека је $K \subseteq 2^{[n]}$ симплицијални комплекс и Δ^{n-1} симплекс свих вероватносних мера на амбијенту $[n]$.* ***Карактеристични праг*** *комплекса K у ознаци $\rho(K)$ дефинишемо са:*

$$\rho(K) = \sup\{\beta \in \mathbb{R}_+ \mid (\exists \mu \in \Delta^{n-1}) K_{\mu \le \beta} \subseteq K\}.$$

Практично, ради одређивања карактеристичног прага комплекса K, налазимо његов линеарно-реализабилан поткомплекс са највећим прагом.

Приметимо да праг линеарно реализабилног комплекса $\Delta_{[n]}$ није ограничен одозго те у том случају узимамо да је $\rho(\Delta_{[n]}) = \infty$.

Карактеристични праг је растућа функција у односу на релацију „бити поткомплекс” јер ако је K_1 поткомплекс комплекса K_2, тада важи инклузија $\{\beta \in \mathbb{R}_+ \mid (\exists \mu \in \Delta^{n-1})K_{\mu\leq\beta} \subseteq K_1\} \subseteq \{\beta \in \mathbb{R}_+ \mid (\exists \mu \in \Delta^{n-1})K_{\mu\leq\beta} \subseteq K_2\}$ што имплицира да је $\rho(K_1) \leq \rho(K_2)$.

Тврђење 4.9. *Нека је $K \subset 2^{[n]}$ симплицијални комплекс. Тада, карактеристични праг комплекса K може да се израчуна помоћу формуле:*

$$\rho(K) = \max\{\beta \in \mathbb{R}_+ \mid (\exists \mu \in \Delta^{n-1})K_{\mu<\beta} \subseteq K\}.$$

Доказ: Дефинишимо скупове $R_1 = \{\beta \in \mathbb{R}_+ \mid (\exists \mu \in \Delta^{n-1})K_{\mu\leq\beta} \subseteq K\}$ и $R_2 = \{\beta \in \mathbb{R}_+ \mid (\exists \mu \in \Delta^{n-1})K_{\mu<\beta} \subseteq K\}$. Скуп R_2 је ограничен одозго јер по претпоставци $[n] \notin K$ па је свако $\beta \in R_2$ мање или једнако од 1. Такође, свакој мери $\mu \in \Delta^{n-1}$ одговара праг $m = \min\{\mu(C) \mid C \in 2^{[n]} \setminus K\} = \mu(C_0)$ такав да је $K_{\mu<m} \subseteq K$ а за свако $\epsilon > 0$ важи $C_0 \in K_{\mu<m+\epsilon}$ што имплицира да $K_{\mu<m+\epsilon} \not\subseteq K$. Овим смо доказали да постоји $\max R_2 = \rho$.

Приметимо да за свако $\mu \in \Delta^{n-1}$ и свако $\beta \in \mathbb{R}_0$ важи $K_{\mu<\beta} \subseteq K_{\mu\leq\beta}$ што имплицира да је $R_1 \subseteq R_2$ односно да је $\sup R_1 \leq \rho$. Претпоставимо да је $\sup R_1 < \rho$. Тада, за меру μ која одговара вредности ρ, као што смо већ приметили, $\rho = \min\{\mu(C) \mid C \in 2^{[n]} \setminus K\}$ па, за $0 < \epsilon < \rho - \sup R_1$, важи да је $K_{\mu\leq\rho-\epsilon} \subseteq K$ односно да је $\sup R_1 < \rho - \epsilon \leq \sup R_1$ што није могуће.

Дакле, $\sup R_1 = \rho$. □

Анализом доказа претходне теореме, закључујемо да карактеристични праг симплицијалног комплекса можемо да рачунамо и на следећи начин.

Тврђење 4.10. *Ако је $K \subset 2^{[n]}$ симплицијални комплекс тада*

$$\rho(K) = \max_{\mu\in\Delta^{n-1}} \min_{C\notin K} \mu(C).$$

Сада наводимо фундаменталну релацију између партиционе инваријанте симплицијалног комплекса и његовог карактеристичног прага која важи за све симплицијалне комплексе.

Теорема 4.2. *Ако је K симплицијални комплекс у амбијенту $[n]$ тада је:*

$$\pi(K) \leq \left\lfloor \frac{1}{\rho(K)} \right\rfloor + 1.$$

Доказ: Приметимо прво да за фиксирану меру $\mu \in \Delta^{n-1}$ и прагове β_1, β_2, ако је $\beta_1 \leq \beta_2$ тада по једначини (4.2) важи да је $K_{\mu<\beta_1} \subseteq K_{\mu<\beta_2}$. Нека је карактеристични праг комплекса $K \subseteq 2^{[n]}$ једнак ρ. То по Тврђењу 4.9 имплицира да постоји мера $\mu \in \Delta^{n-1}$ таква да је $K_{\mu<\rho} \subseteq K$. Претпоставимо да је r природан број такав да је $\frac{1}{r} < \rho$ односно да је $r \geq \left\lfloor \frac{1}{\rho(K)} \right\rfloor + 1$. Тада, за $r = \left\lfloor \frac{1}{\rho(K)} \right\rfloor + 1$ имамо да је $K_{\mu<\frac{1}{r}} \subseteq K_{\mu<\rho} \subseteq K$ што по Тврђењу 4.2 имплицира да је $\pi(K) \leq \pi(K_{\mu<\frac{1}{r}})$ а по Тврђењу 4.6 знамо да је $\pi(K_{\mu<\frac{1}{r}}) \leq r$. $\square$

Сада ћемо да опишемо технику рачунања карактеристичног прага помоћу линеарног програмирања. Нека је $\emptyset \neq K \subset 2^{[n]}$ симплицијални комплекс. Нека су $\mu \in \Delta^{n-1}$ и $\beta \in \mathbb{R}_+$ такви да је $K_{\mu<\beta} \subseteq K$, тада је $2^{[n]} \setminus K \subseteq 2^{[n]} \setminus K_{\mu<\beta} = K_{\mu\geqslant\beta}$. Практично, $\mu \in \mathbb{R}^n$ и $\beta \in \mathbb{R}_+$ задовољавају систем:

$$\text{(4.7)} \qquad \begin{array}{ll} \langle \mu, (1,\ldots,1)\rangle = 1, & \\ \langle \mu, \chi(C)\rangle \geq \beta & \text{за све} \quad C \in 2^{[n]} \setminus K. \end{array}$$

Циљ је да помоћу система (4.7) израчунамо карактеристични праг комплекса K. У Примеру 4.10 ће да да буде доказано да је у амбијенту $[n]$, $\rho(\{\emptyset\}) > 0$ што за комплекс $K \supset \{\emptyset\}$ имплицира да је $\rho(K) > 0$. Због тога, можемо да претпоставимо да је $\beta > 0$ односно једначине система (4.7) можемо да помножимо са β^{-1}. Тако добијамо систем:

$$\text{(4.8)} \qquad \begin{array}{ll} \langle \frac{\mu}{\beta}, (1,\ldots,1)\rangle = \frac{1}{\beta}, & \\ \langle \frac{\mu}{\beta}, \chi(C)\rangle \geq 1 & \text{за све} \quad C \in 2^{[n]} \setminus K. \end{array}$$

Ако константу $\frac{1}{\beta}$ облежимо са $\mathfrak{m}$, по Тврђењу 4.9, налажење карактеристичног прага се своди на одређивање максималне вредности параметра β или еквивалентно минималне вредности параметра $\mathfrak{m}$. Дакле, Карактеристични праг симплицијалног комплекса K је реципрочна вредност решења проблема линеарног програмирања:

$$\text{(4.9)} \qquad \begin{array}{l} \min \quad \langle x, (1,\ldots,1)\rangle \\ x \in \mathbb{R}^n_+; \\ \langle x, \chi(C)\rangle \geq 1, C \in 2^{[n]} \setminus K. \end{array}$$

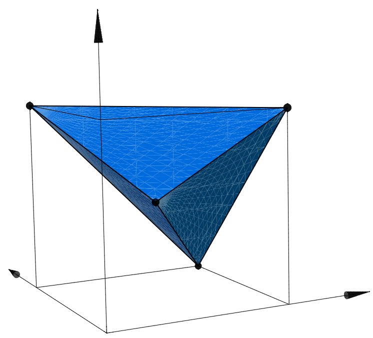
Проблем (4.9) има познату геометријску интерпретацију. Нека је симплицијални комплекс $K \subset 2^{[n]}$ произвољан. Сваком симплексу C фамилије $2^{[n]} \setminus K$ додељуемо полу-простор:

$$\mathcal{O}_C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \chi(C), x\rangle \geq 1\}.$$

Дефиниција 4.6. *Блокирајући полиедар симплицијалног комплекса K је скуп:*

$$B(K) = \bigcap_{C \in 2^{[n]} \setminus K} \mathcal{O}_C.$$

Блокирајући полиедар, као посебна класа полиедара, је прво уведен у [28] Поглавље 5.8. Пример блокирајућег полиедра за комплекс $\binom{[3]}{1}$ је дат на Фигури 18.



Фигура 18: Блокирајући полиедар комплекса $\binom{[3]}{1}$

Сада, реформулацијом проблема (4.9) добијамо следеће тврђење.

Тврђење 4.11. *Нека је $K \subset 2^{[n]}$ симплицијални комплекс. Ако је $\mathfrak{m}$ минимум функције $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дате са $\phi(x) = x_1 + \cdots + x_n$ на блокирајућем полиедру $B(K)$, тада је:*

$$\rho(K) = \frac{1}{\mathfrak{m}}.$$

4.5 Рачунање карактеристичног прага

Рачунање карактеристичног прага помоћу Тврђења 4.11 или 4.10 се у крајњој линији своди на решавање проблема (4.9) као што је илустровано следећим примером.

Пример 4.9. Одредимо карактеристични праг симплицијалног комплекса $\Delta_{[n-1]}$ у амбијенту $[n]$. Како је $\{n\}$ минимални у смислу инклузије не симплекс комплекса $\Delta_{[n-1]}$, а сви симплекси фамилије $2^{[n]} \setminus K$ садрже n, проблем (4.9) за симплицијални комплекс $\Delta_{[n-1]}$ се своди на:

$$\begin{aligned}&\min x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n,\\ &x_n \geq 1.\end{aligned}$$

Отуда, минимум функције ϕ је 1 и постиже се у тачки $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (0, \ldots, 0, 1)$. Дакле, карактериситични праг комплекса $\Delta_{[n-1]}$ у амбијенту $[n]$ је 1.

Претходни пример илуструје неколико особина карактеристичног прага. Прво, као што смо већвидели, карактерстични праг комплекса $\Delta_{[n-1]}$ у амбијенту $[n-1]$ је ∞ односно, $\rho(K)$ зависи од амбијента комплекса K. Друго, како је по Примеру 2.4 комплекс $\Delta_{[n-1]}$ ауто-дуалан у амбијенту $[n]$, добијамо да је:

$$\pi(\Delta_{[n-1]}) = \left\lfloor \frac{1}{\rho(\Delta_{[n-1]})} \right\rfloor + 1.$$

што илуструје чињеницу да неједнакост $\pi(K) \leq \left\lfloor \frac{1}{\rho(K)} \right\rfloor + 1$ Теореме 4.2 не може да се побољша у општем случају.

Рачунање инваријанте $\rho(K)$ комплекса K може значајно да се олакша ако комплекс K има велики степен симетрије. Кажемо да група G делује на комплекс $K \subseteq 2^{[n]}$ ако сваком елементу $g \in G$ одговара бијекција (пермутација) $g : [n] \to [n]$ која индукује изоморфизам $g : K \to K$ (Дефиниција 1.4). Тада кажемо да је K комплекс који је G инваријатан. Ради комплетног увида у материју G инваријантних тополошких простора читаоцу се препоручује [18]. Такође, кажемо да је $\mu = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ мера која је G инваријантна ако за свако $g \in G$ важи да је $\mu = g\mu = (\alpha_{g(1)}, \ldots, \alpha_{g(n)})$ што је еквивалентно услову да је $\alpha_i = \alpha_{g(i)}$ за све $i \in [n]$ и све $g \in G$.

Тврђење 4.12. *Нека је G група свих пермутација скупа $[n]$ које делују на симплицијални комплекс $K \subseteq 2^{[n]}$. Нека је $\Delta_G^{n-1} \subset \Delta^{n-1}$ фамилија свих G инваријантних вероватносних мера на скупу $[n]$. Тада:*

$$\rho(K) = \max\{\beta \in \mathbb{R}_+ \mid (\exists \mu \in \Delta_G^{n-1}) K_{\mu<\beta} \subseteq K\}.$$

Доказ: Нека је $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \Delta^{n-1}$ низ вероватносних мера. Тада, за меру $\mu = \frac{1}{m}(\mu_1 + \cdots + \mu_m)$ и произвољно $\beta \in \mathbb{R}_+$ важи да је

$$K_{\mu<\beta} \subseteq K_{\mu_1<\beta} \cup \cdots \cup K_{\mu_m<\beta}.$$

Заиста, ако је $\mu(A) = \frac{1}{m}\big(\mu_1(A) + \cdots + \mu_m(A)\big) < \beta$ тада, за неко $i_0 \in [m]$ је $\mu_{i_0}(A) < \beta$ јер би у супротном $\mu(A) = \frac{1}{m}\big(\mu_1(A) + \cdots + \mu_m(A)\big) \geq \frac{m\beta}{m}$.

Сада, нека је $\rho(K) = \rho$. По Тврђењу 4.9 то значи да постоји мера $\mu \in \Delta^{n-1}$ таква да је $K_{\mu<\rho} \subset K$. Тада, за свако $g \in G$ комплекс $g(K_{\mu<\rho}) = K_{g\mu<\rho}$ је поткомплекс комплекса $g(K) = K$. Отуда, за G инваријантну вероватносну меру $\mu_G = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} g\mu$ важи да је $K_{\mu<\rho} \subseteq \bigcup\limits_{g \in G} K_{g\mu<\rho} \subseteq K$.

Дакле, максимум се достиже у вероватносној мери μ_G што комплетира доказ. □

Последица 4.4. *Нека је* $K \subseteq 2^G$ *симплицијални комплекс који је инваријантан у односу на групу пермутација* G *скупа* $[n]$ *и* Δ_G^{n-1} *фамилија свих* G *инваријантних вероватносних мера на скупу* $[n]$. *Тада:*

$$\rho(K) = \max_{\mu \in \Delta_G^{n-1}} \min_{C \notin K} \mu(C).$$

Сада наводимо најједноставнији случај одређивања карактеристичног прага G инваријантних симплицијалних комплекса. Кажемо да група пермутација G скупа $[n]$ делује транзитивно на симплицијални комплекс $K \subseteq 2^{[n]}$ ако за свако $i, j \in [n]$ постоји $g \in G$ тако да је $g(i) = j$. Тада, G инваријантна мера $\mu = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ је таква да за произвољне α_i, α_j постоји $g \in G$ тако да је $\alpha_i = \alpha_{g(i)} = \alpha_j$. Отуда, $\Delta_G^{n-1} = \{\big(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\big)\}$ што доказује следеће тврђење.

Последица 4.5. *Ако је G група пермутација скупа* $[n]$ *која транзитивно делује на симплицијални комплекс* $K \subset 2^{[n]}$, *тада је:*

$$\rho(K) = \frac{1}{n} \min\{|C| \mid C \in 2^{[n]} \setminus K\}.$$

Дакле, у случају симплицијалних комплекса којима је група аутоморфизама транзитивна, карактеристични праг је потпуно одређен не-симплексом најмање кардиналности.

Пример 4.10. Нека је $K = \binom{[n]}{k}$ симплицијални комплекс у амбијенту $[n]$. Тада, група аутоморфизама комплекса K је група S_n свих пермутација скупа $[n]$ која је транзитивна па, на основу Последице 4.5, добијамо да је $\rho(K) = \frac{k+1}{n}$. Специјално, за $k = 0$, добијамо да је $\rho(\{\emptyset\}) = \rho\big(\binom{[n]}{0}\big) = \frac{1}{n}$.

Дакле, можемо да закључимо да карактеристични праг симплицијалног комплекса $\emptyset \neq K \subset 2^{[n]}$ припада интервалу $(0, 1]$.

Корисрећи Последицу 4.5 можемо да израчунамо карактеристичне прагове симплицијалних комплекса описаних у Поглављу 2.4.

Пример 4.11. Хеми икосаедар приказан на Фигури 7 је добијен идентификацијом антиподалних тачака икосаедра. Знамо да је група изометрија икосаедра G транзитивна. Отуда, фактор група $G/\{\mathbb{1}, r\}$ где је r рефлексија у односу на барицентар икосадра је такође транзитивна и делује на симплицијални комплекс RP_6. Како је $\min\{|C| \mid C \in 2^{[6]} \setminus RP_6\} = 3$, карактеристични праг комплекса RP_6 је $\rho(RP_6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример 4.12. Комплексна пројективна раван CP_9 описана у Примеру 2.6 има групу аутоморфизама G која садржи све транслације (транслацијом амбијента $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ за вектор $(i,j)\in\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ добијамо скуп $(i,j)+_3\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$). Отуда, група G делује транзитивно на CP_9. Како најмањи (у односну на кардиналност) не симплекс комплекса CP_9 садржи 4 елемента, добијамо да је $\rho(CP_9)=\frac{4}{9}$.

У раду [5] је описано неколико потенцијалних триангулација кватернионске пројективне равни у амбијенту [15]. Касније је у [11] потврђено да међу њима, комбинаторна многострукост HP_{15} која има највећи степен симетрије заиста представља триангулацију кватернионске равни. На страници 169 у раду [5] је доказано да је група аутоморфизама комплекса HP_{15} транзитивна што доказује да је карактеристични праг комплекса HP_{15} једнак $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

4.6 Карактеристични праг спајања симплицијалних комплекса

Спајањем симплицијалних комплекса $K_i\subseteq 2^{V_i}$, $i\in[n]$ дибијамо симплицијални комплекс $K=K_1*\cdots*K_n$ у амбијенту $V_1\sqcup\cdots\sqcup V_n$. Ако 4.2 применимо на компоненте комплекса K, применом Теореме 4.1 добијамо да за партициону инваријанту комплекса K важи:

$$\pi(K)\leq\left\lfloor\frac{1}{\rho(K_1)}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{1}{\rho(K_n)}\right\rfloor+1. \tag{4.10}$$

Пример 4.13. Нека је $K=\binom{[2]}{1}*\cdots*\binom{[2]}{1}=\partial\diamondsuit_n$ триангулација границе крст политопа $\diamondsuit_n=\mathrm{Conv}\{e_i,-e_i\mid i\in[n]\}$. По Примеру 4.10 добијамо да је $\rho(\binom{[2]}{1})=1$ што применом неједнакости (4.10) имплицира да је $\pi(K)\leq n+1$. Међутим, како је група изометрија крст политопа односно група аутоморфизама комплекса K транзитивна, применом Последице 4.5 добијамо да је $\rho(K)=\frac{2}{2n}=\frac{1}{n}$ јер кардиналност најмањег симплекса који не припада комплексу K је 2. Тада, по Теореми 4.2 добијамо да је $\pi(K)\leq n+1$.

Претходни пример показује да карактеристични праг спајања симплицијалних комплекса може да се апроксимира помоћу карактеристичних прагова његових компонената. Мотивисани овом опсервацијом, формулишемо следеће тврђење.

Теорема 4.3. *Нека су $\emptyset=K_i\subset 2^{V_i}$ симплицијални комплекси у амбијентима V_i, $i\in[n]$. Тада, за симплицијални комплекс $K=K_1*\cdots*K_n$ у амбијенту $V_1\sqcup\cdots\sqcup V_n$ важи:*

$$\frac{1}{\rho(K)}=\frac{1}{\rho(K_1)}+\cdots+\frac{1}{\rho(K_n)}.$$

Доказ: Нека је $K_i \subseteq 2^{V_i}$, $i \in [n]$ низ симплицијалних комплекса у дисјунктним амбијентима V_i. Нека је $K = K_1 * \cdots * K_n$ и $\rho(K) = \rho$, $\rho(K_i) = \rho_i$, $i \in [n]$ и нека је $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$.

Како је по претпоставци $K_i \subseteq K$ за све $i \in [n]$, добијамо да је $\rho_i \leq \rho$ за све $i \in [n]$. Сумирањем, добијамо да је $\rho_1 + \cdots + \rho_n \leq n\rho$ односно да је

$$\frac{1}{\rho} \leq \frac{n}{\rho_1 + \cdots + \rho_n} \leq \frac{1}{\rho_1} + \cdots + \frac{1}{\rho_n}.$$

.

Нека је $\mu : V \to \mathbb{R}_+$ вероватносна мера таква да је $\min\{\mu(C) \mid C \in 2^V \setminus K\} = \mu(C_0) = \rho$. Нека је $\mu(V_i) = \alpha_i$ за све $i \in [n]$. Приметимо да је $\alpha_i > 0$ за све $i \in [n]$ јер $\alpha_i = 0$ имплицира да је $\mu(V_i) = 0$ односно да $V_i \in K_{\mu<\rho} \subseteq K$ што није могуће. Тада, на амбијентима V_i можемо да конструишемо вероватносне мере $\mu_i = \frac{1}{\alpha_i}\mu|_{V_i}$ ($\mu|_{V_i}$ је рестрикција мере μ на скуп V_i). Нека је $C \in 2^{V_i} \setminus K_i$ произвољан не симплекс. Како симплекс C не припада комплексу K, добијамо да је $\mu(C) \geq \rho$ односно да је $\mu_i(C) \geq \frac{\rho}{\alpha_i}$. Отуда $\min\{\mu_i(C) \mid C \in 2^{V_i} \setminus K_i\} = \frac{\rho}{\alpha_i}$ што имплицира да је $\rho_i \geq \frac{\rho}{\alpha_i}$ односно да је $\frac{1}{\rho_1} \leq \frac{\alpha_1}{\rho}$. Сумирањем добијених неједнакости добијамо:

$$\frac{1}{\rho_1} + \cdots + \frac{1}{\rho_n} \leq \frac{\alpha_1}{\rho} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\rho} = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\rho} = \frac{1}{\rho}.$$

□

Приметимо да у Теореми 4.3, комплекси $\emptyset$ и Δ_{V_i} не могу да учествују у спајању. Међутим, ако је $K_i = \emptyset \subseteq 2^{V_i}$ један од компоненти спајања, то за комплекс K практично значи увећање амбијента а проблем партиционе инваријанте ових комплекса је решен Тврђењем 4.3. Такође, ако је $K_i = \Delta_{V_i}$, тада симплицијални комплекс $K = K_1 * \cdots * K_n$ је изоморфан комплексу $(K_1 * \cdots K_{i-1} * K_{i+1} * \cdots * K_n) * \Delta_{V_i}$ а у Примеру 1.2 смо видели да се овакво спајање своди на узастопни конус над $K_1 * \cdots K_{i-1} * K_{i+1} * \cdots * K_n$ што по Примеру 4.5 не утиче на партициону инваријанту.

Теорема 4.3 такође показује да је неједначина (4.10) еквивалентна неједначини Теореме 4.2 примењене на спајање симплицијалних комплекса.

Последица 4.6. *Ако је $\emptyset \neq K \subseteq 2^V$ симплицијални комплекс тада је*

$$\rho(K^{*n}) = \frac{1}{n}\rho(K)$$

Пример 4.14. Ако је K симплицијални комплекс RP_6 или CP_9 или HP_{15}, тада је карактеристични праг комплекса K^{*n} редом $\frac{1}{2n}$ или $\frac{4}{9n}$ или $\frac{2}{5n}$.

4.7 Ексцес карактеристичног прага

Поставља се питање колико је техника карактеристичног прага добра за процену партиционе инваријнанте датог симплицијалног комплекса. Због тога, у овом одељку уводимо појам ексцеса симплицијалног комплекса који практично представља грешку процене партиционе инваријанте коришћењем Теореме 4.2.

Дефиниција 4.7. *Нека је $K \subseteq 2^{[n]}$ симплицијални комплекс. Ексцес карактеристичног прага (или кратко ексцес) комплекса K дефинишемо са:*

$$\epsilon(K) = \left\lfloor \frac{1}{\rho(K)} \right\rfloor + 1 - \pi(K).$$

Као што смо већ видели у Поглављу 4.5, како су комплекси RP_6, CP_9 и HP_{15} ауто дуални и знамо њихов карактеристични праг, имамо да је $\epsilon(RP_6) = \epsilon(CP_9) = \epsilon(HP_{15}) = 1$. Ради тестирања ексеса симплицијалних комплекса, у програму $\mathrm{Wolfram\ Mathematica}$ је конструисан алгоритам који рачуна карактеристични праг датог симплицијалног комплекса решавањем проблема (4.9). Програм је примењен на ауто-дуалне симплицијалне комплеке генерисане техникама описаним у Поглављу 3 и добијена је Табела 2.

$n = 3$

ρ	1	2/3
ϵ	0	1

$n = 4$

ρ	1	2/3	3/5
ϵ	0	1	1

$n = 5$

ρ	1	2/3	3/5	4/7	5/9
ϵ	0	1	1	1	1

$n = 6$

ρ	1	2/3	3/5	4/7	5/9	6/11	7/13	8/15	9/17	1/2
ϵ	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Табела 2: Карактеристични прагови и ексцеси ауто-дуалних комплекса у амбијентима $[n]$ за $n = 3, 4, 5, 6$.

Као што се види из табеле, ексцес ауто-дуалних симплицијалних комплекса је углавном једнак 1. Ово је посебно изненађујуће за симплицијалне комплексе у амбијентима $[3]$, $[4]$ и $[5]$ јер знамо да су сви они линеарно релизабилни. Вредност ексцеса 0 одговара ауто-дуалним симплицијалним комплексима $\Delta_{[n]\setminus\{i\}}$ чији карактерситични праг је по Примеру 4.9 једнак 1. Отуда, намеће се закључак да да би у увећаним амбијентима вредност ексцеса била мања. Међутим, Табела 3 добијена рачунањем карактеристичног прага ауто-дуалних комплекса $\mathcal{D}^{[n]}$ али у увећаним амбијентима $[n+1]$ у којима су ови комплекси по Тврђењу 4.3 минимално $3-$неизбежни, наговештава особину да ексцес симплицијалног комплекса K не зависи од амбијента.

$n=4$

ρ	$1/2$	$2/5$
ϵ	0	1

$n=5$

ρ	$1/2$	$2/5$	$3/8$
ϵ	0	1	1

$n=6$

ρ	$1/2$	$2/5$	$3/8$	$4/11$	$5/14$
ϵ	0	1	1	1	1

$n=7$

ρ	$1/2$	$2/5$	$3/8$	$4/11$	$5/14$	$6/17$	$7/20$	$8/23$	$9/26$	$1/3$
ϵ	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Табела 3: Карактеристични прагови и ексцеси минимално $3-$неизбежних симплицијалних комплекса у амбијенту $[n]$ који су ауто-дуални у амбијенту $[n-1]$ за $n=4,5,6,7$.

Дакле, у великом броју случајева, Теорема 4.2 не може да одреди прецизно партициону инваријанту симплицијалног комплекса већ углавном њену мајоранту.

Следећи пример илуструје особину да ексцес карактерстичног прага симплицијалног комплекса може да буде произвољно велики.

Пример 4.15. Нека је $K = \binom{[3]}{1}$ симплицијални комплекс који је ауто-дуалан у амбијенту $[3]$. По Примеру 4.10, његов карактеристични праг је $\rho(K) = \frac{2}{3}$. Отуда, по Последици 4.6, симплицијални комплекс K^{*n} у амбијенту $[3] \sqcup \cdots \sqcup [3]$ има карактеристични праг $\frac{2}{3n}$. Како је по Примеру 4.6 партициона инваријанта комплекса K^{*n} једнака $n+1$, добијамо да је ексцес симплицијалног комплекса K^{*n}:

$$\epsilon(K^{*n}) = \left\lfloor \frac{1}{\rho(K^{*n})} \right\rfloor + 1 - \pi(K^{*n}) = \frac{3n}{2} + 1 - (n+1) = \frac{n}{2}.$$

Побољшање Теореме 4.2 ради смањења грешке апроксимације партиционе инваријанте ће да буде предмет будућих истраживања.

5 Додатак: Александерова дуалност и Дедекиндови бројеви

У овом поглављу истражујемо примену Теореме 3.1 ради процене Дедекиндових бројева.

Дедекиндови бројеви $\mathbb{D}(n)$ су уведени у [8] као бројеви различитих монотоних Булових функција са $n \in \mathbb{N}$ променљивих. Формула за рачунање вредности $\mathbb{D}(n)$ је откривена у [19] међутим, упркос овом открићу, тачне вредности бројева $\mathbb{D}(n)$ се знају само за $n \leq 8$ и много труда је уложено ради налажења Дедекиндових бројева за веће вредности параметра n.

Функцију $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ називамо Булова функција са $n \in \mathbb{N}$ променљивих. Разлог за термин Булова је што, ако скуп $\{0,1\}$ интерпретирамо логичким симболима $\{\bot, \top\}$, функцију $f = f_t$ можемо да посматрамо као евалуацију терма t у којем фигуришу променљиве $x_1, \ldots, x_n$. На пример, t је таутологија акко за све $(x_1, \ldots, x_n) \in \{\bot, \top\}^n$ важи да је $f_t(x_1, \ldots, x_n) = \top$.

На скупу $\{0,1\}^n$ дефинишемо уређење на следећи начин:

$$(x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow (\forall i \in [n]) x_i \leq y_i. \tag{5.1}$$

Тада, кажемо да је Булова функција f монотона акко из $(x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n)$ следи $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n)$. На пример, ако узмемо да је $\bot < \top$, пример једне монотоне Булове функције на $\{\bot, \top\}^n$ је $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \vee \cdots \vee x_n$.

Свакој монотоној Буловој функцији $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ додељујемо фамилију скупова $K_{f=0} = \{A \in [n] \mid f\big(\chi(A)\big) = 0\}$. Тада, $K_{f=0}$ је симплицијални комплекс у амбијенту $[n]$ јер, $A \subseteq B$ акко је $\chi(A) \preceq \chi(B)$ па, ако $B \in K_{f=0}$ то имплицира да је $f\big(\chi(A)\big) \leq f\big(\chi(B)\big) = 0$ односно да је $f\big(\chi(A)\big) = 0$ што значи да $A \in K_{f=0}$.

Важи и обрнуто тј. сваком симплицијалном комплексу $K \subseteq 2^{[n]}$ одговара јединствена Булова функција $f_K : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ дата са:

$$f_K(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \{i \in [n] \mid x_i = 0\} \in K, \\ 0, & \{i \in [n] \mid x_i = 0\} \notin K. \end{cases}$$

При том, услов монотоности функције f_K је испуњен јер $(x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n)$ је еквивалентно инклузији $\{i \in [n] \mid x_i = 0\} \subseteq \{i \in [n] \mid y_i = 0\}$.

Дакле, свакој монотоној буловој функцији са n променљивих одговара једиснтвени симплицијални комплекс са највише n врхова. Отуда, $\mathbb{D}(n)$

може да се израчуна као број различитих симплицијалних комплекса у амбијенту $[n]$.

Нека је $\mathcal{K}^{[n]}$ фамилија свих симплицијалних комплекса у амбијенту $[n]$ а нека $\mathcal{SPD}^{[n]}$ односно $\mathcal{T}^{[n]}$ представљају фамилије свих над-дуалних односно трансцендентних симплицијалних комплекса у амбијенту $[n]$.

n	$\lvert\mathcal{SD}^{[n]}\rvert$	$\lvert\mathcal{D}^{[n]}\rvert$	$\lvert\mathcal{T}^{[n]}\rvert$	$\mathbb{D}(n)$
1	2	1	0	3
2	4	2	0	6
3	12	4	0	20
4	81	12	18	168
5	2646	81	2370	7581

Табела 4: Дедекиндови бројеви

Како је по Дефиницији 2.3 сваки комплекс $K \in \mathcal{K}^{[n]}$ под-дуалан, над-дуалан или трансцендентан, а трансцендентни комплекси не могу да да буду под-дуални или над-дуални, добијамо формулу:

$$|\mathcal{K}^{[n]}| = |\mathcal{SD}^{[n]}| + |\mathcal{SPD}^{[n]}| - |\mathcal{SD}^{[n]} \cap \mathcal{SPD}^{[n]}| + |\mathcal{T}^{[n]}|.$$

на осонову Леме 2.1 видимо да је оператор дуалности $\widehat{\_}^{[n]} : \mathcal{SD}^{[n]} \to \mathcal{SPD}^{[n]}$ сам себи инверзан па је бијекција што имплицира да је $|\mathcal{SD}^{[n]}|$ једнако $|\mathcal{SPD}^{[n]}|$. Такође, по Дефиницији 2.3 симплицијални комплекс је ауто-дуалан акко је под-дуалан и над-дуалан. Претходне опсервације, заједно са Теоремом 3.1 доказјује да је:

$$\mathbb{D}(n) = 2|\mathcal{D}^{[n+1]}| - |\mathcal{D}^{[n]}| + |\mathcal{T}^{[n]}| \tag{5.2}$$

Табела 4, добијена помоћу рачунара, илуструје примену једначине (5.2) за мале вредности параметра n.

Једначина (5.2) указује на чињеницу да познавање броја ауто-дуалних комплекса обезбеђује доњу границу за $\mathbb{D}(n)$. Такође, како су по Тврђењу 2.2 сви комплекси у амбијенту $[n]$ поддуални у амбијенту $[n+1]$, број ауто-дуалних симплицијалних комплекса у амбијенту $[n+2]$ обезбеђује горњу границу за број $\mathbb{D}(n)$ односно важи неједнакост:

$$2|\mathcal{D}^{[n+1]}| - |\mathcal{D}^{[n]}| \leq \mathbb{D}(n) < |\mathcal{D}^{[n+2]}|. \tag{5.3}$$

Истраживањем особина графа суседства $\mathcal{NG}_n$ помоћу метода описаних у Поглављу 3 можемо да откријемо број ауто-дуалних симплицијалних комплекса у амбијенту $[n]$ што применом једначине (5.3) даје процену броја $\mathbb{D}(n)$. Да би Дедекиндови бројеви могли потпуно да се одреде овом методом, потребно је да се анализирају комбинаторна својства трансцендентних симплицијалних комплекса што ће да буде предмет будућих истраживања.

Литература

[1] B. Bagchi, B. Datta. *A short proof of the uniqueness of Kühnel's 9-vertex complex projective plane*, Adv. Geom. **1**, 157–163 (2001).

[2] B. Bagchi, B. Datta. *On Kühnel's 9-Vertex Complex Projective Plane*, Geom. Dedicata **50**: 1–13, (1994).

[3] A. Björner, M. Tancer. *Combinatorial Alexander duality - a short and elementary proof*, Discrete Comput. Geom. **42**(4), 586-593 (2009).

[4] P. Blagojević, F. Frick, G. Ziegler. *Tverberg plus constraints*, Bull. Lond. Math. Soc. **46**, 953–967, (2014).

[5] U. Brehm, W. Kühnel. *15-vertex triangulations of an 8-manifold*, Math. Ann. **294**(1), 167–193 (1992).

[6] U. Brehm and W. Kühnel. *Combinatorial manifolds with few vertices*, Topology **26**, 465-473 (1987).

[7] J.H. Conway and J.C. Lagarias. *Tiling with Polyominoes and Combinatorial Group Theory*, J. Combin. Theory Ser. A **53**, 183–208 (1990).

[8] R. Dedekind, *Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler*, GW **2**, 103–148 (1897).

[9] J. Edmonds, D. R. Fulkerson, *Bottleneck Extrema*, J. Combin. Theory **8**, 299–306 (1970).

[10] J. Eells, N. H. Kuiper. *Manifolds which are like projective planes*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci **14**, 181–222 (1962).

[11] D. Gorodkov. *A 15-vertex triangulation of the quaternionic projective plane*, Russian Math. Surveys **71**(6), (2016).

[12] Halin, H.A. Jung. *Charakterisierung der Komplexe der Ebene und der 2-Sphäre*, Arch. Math. **15**, 466469 (1964).

[13] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, (2002).

[14] F. D. Jevtić, M. Timotijević, R. T. Živaljević, *Polytopal Bier spheres and Kantorovich-Rubinstein polytopes of weighted cycles*, arXiv:1812.00397 [math.MG]

[15] M. Jelić, D. Jojić, M. Timotijević, S.T. Vrećica, R.T. Živaljević. *Combinatorics of unavoidable complexes*, arXiv:1612.09487 [math.AT].

[16] D. Jojić, W. Marzantowicz, S.T. Vrećica, R.T. Živaljević, *Topology and combinatorics of 'unavoidable complexes'*, arXiv:1603.08472 [math.AT].

[17] M. Jungerman, G. Ringel. *Minimal triangulations on orientable surfaces*, Acta Math. **145**, 121–154 (1980).

[18] K. Kawakubo, *The Theory of Transformation Groups*, Oxford University Press, (1987).

[19] A. Kisielewicz, *A solution of Dedekind's problem on the number of isotone Boolean functions*, J. Reine Angew. Math. **386** (1988), 139–144.

[20] C. Kuratowski, Casimir. *"Sur le probleme des courbes gauches en Topologie"*, Fund. Math. **15**(1), 271-283 (1930).

[21] F. H. Lutz. *Triangulated Manifolds with Few Vertices: Combinatorial Manifolds*, arXiv:math/0506372 [math.CO].

[22] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg, (2003).

[23] S.A. Melikhov. *Combinatorics of Embeddings*, arXiv:1103.5457 [math.AT].

[24] J. R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*, Cambridge University Press (1984).

[25] M. Muzika Dizdrević, M. Timotijević, R. Živaljević, *Signed Polyomino Tillings By n-in-Line Polyominos and Gröbner Bases*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), **99**(113), 31–42 (2016)

[26] J. Pakianathan, T. Winfree, *Threshold complexes and connections to number theory*, Turkish J. Math. **37**, 511539 (2013).

[27] G. Ringel. *Wie man die geschlossenen nichtorientierbaren Flächen in möglichst wenig Dreiecke zerlegen kann*, Math. Ann. **130**, 317326 (1955).

[28] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*, Springer, Berlin (2003).

[29] R. P. Stanley. *Linear Diophantine equations and local cohomology*, Invent. Math. **68**, 175–193 (1982).

[30] A. D. Taylor and W. S. Zwicker, *A characterization of weighted voting*, Proc. Amer. Math. Soc. **115**, 1089–1094 (1992).

[31] A. D. Taylor and W. S. Zwicker, *Simple games: desirability relations, trading, pseudoweightings*, Princeton U. Press (1999).

[32] M. Timotijević. *Note on combinatorial structure of self-dual simplicial complexes*, Mat. Vesnik **71**, 104–122, (2019).

[33] R.T. Živaljević. *Topological methods. Chapter 14 in Handbook of Discrete and Computational Geometry*, J.E. Goodman, J. O'Rourke, eds, Chapman & Hall/CRC, 305–330 (2004).

[34] R. Živaljević. *User's guide to equivariant methods in combinatorics, I and II*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), (I) **59**(73), 114–130, (1996) and (II) **64**(78), 107–132, (1998).